Funciones de variable compleja

Examen, 20 de julio de 2024.

N^o Examen

Apellidos **Nombres** **Nº de Cedula**

Problema 1.

(25 puntos)

a. Sea f una función holomorfa en una cierta región D demostrar que si $f = u + iv$ entonces u y v son diferenciable y verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cualquier punto de D.

b. Sea u una función de clase C^2 se dice armónica si verifica la ecuación de Laplace es decir $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Probar que si $f = u + iv$ es holomorfa en una región D entonces u y v son armónicas

c. Determinar si existe $f = u + iv$ holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que

$$u(x, y) = e^{\frac{y}{x}}.$$

Problema 2.

(25 puntos)

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ una sucesión no constante, tal que $z_n \to \bar{z} \in \Omega$,

a. Demostrar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f(z_n) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ entonces $f \equiv 0$

b. Deducir que si f y g son dos funciones holomorfas en Ω tales que $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $f(z) = g(z)\ \forall\, z \in \Omega$

c. Probar que no existe una función holomorfa en el disco unidad que cumpla $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Sugerencia: Razonar por absurdo y considerar la función $h(z) = z^3$

Problema 3.

(25 puntos)

a. Probar que si T es una transformación de Moebius diferente de la identidad tiene a lo sumo 2 puntos fijos.

b. Mostrar que dado una terna (a, b, c) de puntos distintos en $\bar{C}$ existe una única transformación de Moebius que lleva $a \to 0$, $b \to 1$, $c \to \infty$

c. Determinar una transformación de Moebius que lleve el eje imaginario en la circunsferencia de centro 0 y radio 1.

Problema 4.

(25 puntos)

Calcular justificando cada paso y enunciando resultados que se utilicen:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1} dx$$