Funciones de variable compleja

Examen, 5 de diciembre de 2024.

N^o Examen

Apellidos **Nombres** **Nº de Cedula**

Problema 1.

(33 puntos)

a. Defina transformación de Moebius.
b. Demuestre que toda transformación de Moebius transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.
c. Determine una trasformación de Moebius que transforme la recta $y = 0$ en la circunferencia de cetro el origen y radio 1. Cual será la imagen del eje imaginario por esta transformación?

Problema 2.

(33 puntos)

a. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$ el único cero de f, probar que existen $m \in \mathbb{N}$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$.
b. Sea $q \in \mathcal{H}(\Omega)$ con un único cero en $z_0 \in \Omega$, si $q'(z_0) \neq 0$ deducir que $q(z) = (z - z_0)g(z)$ con $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(z_0) \neq 0$.
c. Se define

$$f(z) = \frac{1}{q(z)^2}$$

con q como en la parte anterior. Probar que f tiene un polo de orden 2 en z_0 y que

$$Res(f, z_0) = -\frac{q''(z_0)}{\big(q'(z_0)\big)^3}$$

Problema 3.

(33 puntos)

a. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función armónica en Ω (i.e. $u_{xx} + u_{yy} = 0$). Mostrar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $Re(f) = u$
b. Sea $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ ¿existe f entera tal que $Re(f) = u$? En caso afirmativo y suponiendo que $Im(f)(-1 + i) = -2$ calcular $Im(f)$.

Problema 4.
(34 puntos)

Probar que
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{16\cos^2 t + 9} = \frac{2\pi}{15}$$