Práctico 4

Ejercicio 9.

a. Para n y t positivos, repasar la demostración (hay al menos dos posibles demostraciones) que el coeficiente de $x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$ en $(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$$

con $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$.

b. (Ej. 3 del 1er parcial del 2001) Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(x^3 - x^2 + x - 1)^6$.

$$(x^3 - x^2 + x - 1) \cdots (x^3 - x^2 + x - 1)$$

Formas de conseguir x^4:

$$(x^3) \cdot (x) \cdot (-1)^4 = x^4 \rightarrow C_1^6 \cdot C_1^5 \cdot C_4^4 = 30 = PR^6_{1,1,4}$$

$$(-x^2)^2 \cdot (-1)^4 = x^4 \rightarrow PR^6_{2,4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{30}{2} = 15$$

$$(-x^2) \cdot (x)^2 \cdot (-1)^3 = x^4 \rightarrow PR^6_{1,2,3} = \frac{6!}{2!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$$

$$(x)^4 \cdot (-1)^2 = x^4 \rightarrow PR^6_{2,4} = 15$$

$$PR^n_{n_1, \dots, n_t} = \frac{n!}{n_1! \dots n_t!} = C^n_{n_1} \cdot C^{n-n_1}_{n_2} \cdot \dots \cdot C^{n_t}_{n_t}$$

Respuesta: 120

Ejercicio MO3:

Considere la sucesión a_n que verifica $a_0 = 1$ y para todo $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots a_n a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}.$$

Si $f(x)$ es la función generatriz de a_n, entonces $f(1/4)$ vale:

$$C_n = a_n * b_n := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$$

$$\rightarrow a_{n+1} = a_n * a_n$$

Teorema: Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n * b_n) x^n$

Obs: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$

$$\Rightarrow x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = f(x) - a_0$$

$$\overset{\parallel}{x \sum_{n=0}^{\infty} (a_n * a_n) x^n} = x [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow x[f(x)]^2 = f(x) - a_0 \Rightarrow x f(x)^2 - f(x) + a_0 = 0 \qquad a_0 = 1$$

$$x f(x)^2 - f(x) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \underbrace{f(1/4)}_{u}{}^2 - f(1/4) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} u^2 - u + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 - 4u + 4 = 0 \Rightarrow (u-2)^2 = 0 \Rightarrow u = 2$$

Ejercicio 11. (Examen Diciembre 2009)
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_n x^n = -a_{n-1} x^n - b_n x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow$$

$$A(x) - \cancel{a_0}^{\,0} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - (B(x) - \overset{2}{b_0}) \Rightarrow$$

$$A(x) = xA(x) - B(x) + 2 \Rightarrow$$

$$(1-x)A(x) + B(x) = 2 \Rightarrow B(x) = 2 - (1-x)A(x) = 2 + (x-1)A(x)$$

$$b_{n+1} x^n = b_n x^n - 3a_{n-1} x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n - 3x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \Rightarrow$$

$$B(x) - b_0 - b_1 x = x(B(x) - b_0) - 3x^2 A(x) \Rightarrow$$

$$B(x) - 2 - x = x(B(x) - 2) - 3x^2 A(x) \Rightarrow$$

$$3x^2 A(x) + (1+x)B(x) = 2 - x \Rightarrow$$

$$3x^2 A(x) + (1+x)(2 + (x-1)A(x)) = 2 - x$$

$$\Rightarrow \left(3x^2+(x^2-1)\right)A(x) + \cancel{2} + 2x = \cancel{2} - x$$

$$\Rightarrow (4x^2-1)A(x) = -3x \Rightarrow A(x) = \frac{-3x}{4x^2-1} = \frac{3x}{1-4x^2}$$

$$= 3\,\frac{x}{1-4x^2} = 3\cdot x\cdot\frac{1}{1-4x^2} = 3\cdot x\cdot\frac{1}{1-(2x)^2} = 3x\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot 4^n x^{2n+1} \Rightarrow a_{2n} = 0$$

$$\underbrace{a_{2n+1}}_{m} = 3\cdot 4^n$$

$$3\cdot 4^{\frac{m-1}{2}}$$

(c) $c_{n+2} + 4c_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$ con $c_0 = c_1 = 1.$

$$C_{n+2} = -4C_n \Rightarrow C_{2n} = (-4)^n\, c_0 = (-4)^n$$

$$C_{2n+1} = (-4)^n$$

$$C_n = 1, 1, -4, -4, 16, 16, -64, -64, \ldots$$

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5+x-1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x+4y+2z+5)^{14}$.

$$(2x)(4y)^3(2z)^5\,5^5 = 2\cdot 4^3\cdot 2^5\cdot 5^5\, xy^3z^5 \rightarrow \text{Cada sumando}$$

$$PR^{14}_{1,3,5,5} = \frac{14!}{5!^2\cdot 3!} \Rightarrow \frac{14!}{5!^2\cdot 3!}\,5^5\cdot 2^5\cdot 4^3\cdot 2$$

↑ Cantidad de sumandos

5. Sean $I = \{1, 2, \ldots, 11\}$ y $J = \{1, 2, \ldots, 5\}$.

Denotamos por $\mathcal{A} = \{X : X \subseteq I\}$ al conjunto potencia de I (i.e. el conjunto de todos los subconjuntos de I).

Consideramos en $\mathcal{A}$ la relación de equivalencia $X \sim Y$ si $X \cap J = Y \cap J$.

Entonces el cardinal del conjunto cociente $A/\sim$ es ____.

La clase de equivalencia de $X = \{1, 3, 8\}$ tiene ____ elementos.

Dado $X \subseteq I$, $[X]_\sim = \{Y \subseteq I : X \cap J = Y \cap J\}$

↑ Sólo miro del 1 al 5

Me importa $X \cap J \subseteq J \rightarrow$ Hay $\# P(J) = 2^{\# J} = 2^5 = 32$

$$(1 - x^3)^5 = \sum_{i=0}^{i=5} C_i^5 \cdot (-1)^i \cdot (x^3)^i$$

$$\sum_{i=0}^{5} C_i^5 \, 1^i \, (-x^3)^{5-i}$$

$$(1-x^3)^5 = (-(x^3-1))^5 = (-1)^5 (x^3-1)^5 = -(x^3-1)^5$$

$$= \cancel{-}\sum_{i=0}^{5} C_i^5 \, (-1)^{\cancel{5-}i} (x^3)^i = \sum_{i=0}^{5} C_i^5 \, (-1)^i (x^3)^i$$

2. La cantidad de relaciones de equivalencia en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tales que $\#[2] = \#[3]$ y $\#[5] = 2$ es:

$\# [X] \geq 1 \quad (x \in \# [x])$

Si $\# [2] = 2 \Rightarrow$ Si $2R5 \rightarrow [2] = \{2,5\} \rightarrow 2 \not R 3$

$\{2,5\}, \{3,X\}, \{Y,Z\} \rightarrow$ 3 opciones para X

$\{2,5\}, \{3,X\}, \{Y\}, \{Z\} \rightarrow$ " " " " 6

Si $2 \not R 5$, Si $2R3 \Rightarrow [2] = \{2,3\}$

$\{2,3\}, \{5,X\}, \{Y\}, \{Z\} \rightarrow$ 3 opciones para X

$\{2,3\}, \{5,X\}, \{Y,Z\} \rightarrow$ " 6

Si $2 \not R 3 \Rightarrow [2] = \{2, x\} / x \in \{1, 4, 6\}$

$\{2, x\}, \{3, y\}, \{5, z\}$ 3 para x, 2 para y

$\{2, x\}, \{3, 5\}, \{y\}, \{z\}$ 3 para x

$\{2, x\}, \{3, 5\}, \{y, z\}$ 〃

$6 + 3 + 3 = 12$

Si $\#[2] \neq 2$:

$\#[2] = 1 \Rightarrow [2] = \{2\}, \; [3] = \{3\}$

$\{2\}, \{3\}, \{5, x\}, \{y\}, \{z\} \to$ 3 para x

$\{2\}, \{3\}, \{5, x\}, \{y, z\} \to$ 〃 〃 〃 6

Si $\#[2] = 3 \Rightarrow \#[3] = 3 \Rightarrow [2] \neq [5] \neq [3] \Rightarrow 2 \not R 5$ y $3 \not R 5$

Si $2 \not R 3$: $\{2, x, y\}, \{3, z, w\}, \{5, t\}$ ↯

$\Rightarrow 2R3 \Rightarrow \{2, 3, x\}, \{5, y\}, \{z\} \to$ 3 para x, 2 para y 6

Si $\#[2] = 4 \to 2 \not R 5$, $2R3$

$\{2, 3, x, y\}, \{5, z\} \to$ 3 para z 3

Si $\#[2] = 5$ $\{2, 3, x, y, z\}, \{5, w\}$ ↯

$\Rightarrow \#[2] \leq 4$

39

Ejercicio 4. En cada caso hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R en $\{0, 1, \ldots, 7\}$ tales que:

a. $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$.

b. $\#[0] < \#[1] < \#[2]$ y $(3, 4) \in R$.

Si $\underset{1}{\#[0]} < \underset{2}{\#[1]} < \underset{3}{\#[2]} \Rightarrow \{0\}, \{1, x\}, \{2, y, z\}, \{3, 4\}$ 3

$\{0\}, \{1, x\}, \{2, 3, 4\}, \{y, z\}$ 3

$\{0\}, \{1, x\}, \{2, 3, 4\}, \{y\}, \{z\}$ 3

Si $\#[0] = 2 \to 8 \geq 2 + 3 + 4 = 9$ ↯ $\Rightarrow \#[0] = 1$

Si $\#[1] = 3 \to 8 \geq 1 + 3 + 4 = 8 \to \{0\}, \{1, x, y\}, \{2, z, w, t\}$

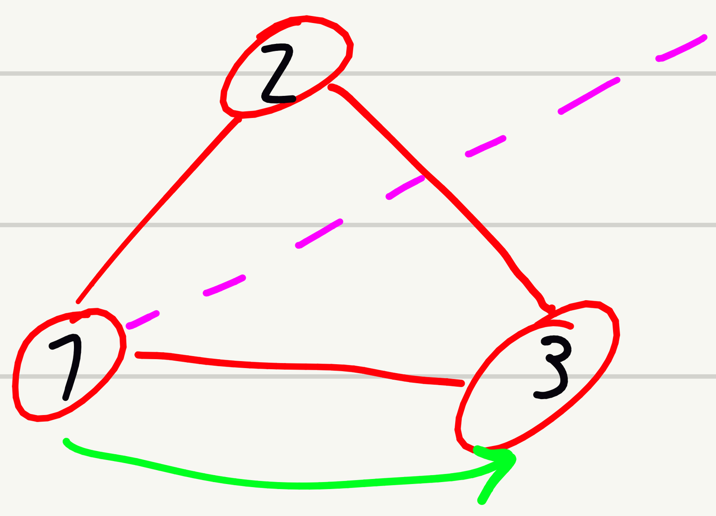
$\{0\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6, 7\}$ 1

$\{0\}, \{1, y, z\}, \{2, 3, 4, x\}$ 3

13

Si $\#[1]=4 \rightarrow 8 \geq 1+4+5=10$ ↯

EJERCICIO 3 La cantidad de caminos de longitud 99 que existen entre dos vértices adyacentes dados de C_3 es:
Opciones: A) 2^{98}; B) 2×3^{97}; C) $(2^{99}-1)/3$; D) $(2^{99}+1)/3$; E) $3 \times (2^{99}+1)$.



$a_n = \#$ caminos de largo n, de 1 a 3

Buscamos a_{99}

$b_n = \#$ de 1 a 1

$c_n = \#$ de 1 a 2 $= a_n$

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$a_{n+1} = b_n + c_n = b_n + a_n \rightarrow a_{n+1} = a_n + b_n$

$b_{n+1} = a_n + c_n = 2a_n \qquad b_{n+1} = 2a_n \rightarrow b_n = 2a_{n-1}$

$\Longrightarrow a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \rightarrow a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1} = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{2,-1\}$

$\Longrightarrow a_n = \alpha\, 2^n + \beta(-1)^n$

$a_1 = 1 = 2\alpha - \beta \rightarrow 6\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1/3$

$a_2 = 1 = 4\alpha + \beta \qquad \rightarrow \beta = \frac{2}{3} - 1 = -1/3$

$\Longrightarrow a_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} \Rightarrow a_{99} = \dfrac{2^{99}+1}{3}$