Examen Julio 2024 - Versión 4

Sábado **27** de Julio de 2024

Nro de examen	Cédula	Apellido y nombre

Información importante:

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.
- **Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.**

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10

Notación: En el examen se usa la siguiente notación:

- $S^*(f,P)$ denota la suma superior y $S_*(f,P)$ la suma inferior de f con respecto a la partición P.
- $I^*(f)$ denota la integral superior: $I^*(f) = \inf\{S^*(f,P) : P \text{ es partición}\}$, mientras que $I_*(f)$ denota la integral inferior: $I_*(f) = \sup\{S_*(f,P) : P \text{ es partición}\}$

Ejercicio 1

Indicar el valor de $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

A) -2π
B) $-\pi$
C) 2π
D) $\pi - 1$
E) $1 - \pi$
F) π

Ejercicio 2

Indicar el valor de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2-1}\,\mathrm{d}x$.

A) $-\frac{1}{2}(1-\ln(e+2)+\ln(3))$
B) $\ln(e^2+2e)-\ln(3)$
C) $\frac{1}{2}(1+\ln(e+2)+\ln(3))$
D) $\frac{1}{2}(1-\ln(e+2)+\ln(3))$
E) $-\frac{1}{2}(1+\ln(e+2)+\ln(3))$
F) $\frac{1}{e+2}-\frac{1}{3}$

Ejercicio 3

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones de las cuales sabemos lo siguiente:

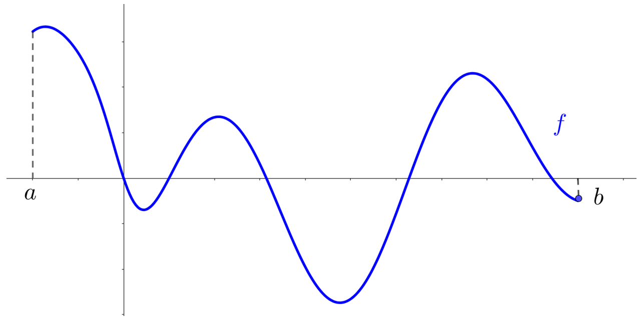
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)}{x} = 2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} (g(x))^3 = 8$

Entonces el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) + g(x)$

A) existe y vale 0
B) existe y vale 4
C) existe y vale 9
D) existe y vale 8
E) existe y vale 2
F) no existe

Ejercicio 4

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función continua cuyo gráfico se da en la imagen.



Consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) > 0\} \ \text{ y } B = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) < 0\}$$

y sean $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \inf(B)$.
Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) $\alpha = \beta$ y $f(\alpha) = 0$.
B) $\alpha = \beta$ y $f(\alpha) \neq 0$.
C) $\alpha < \beta$ y $f(\alpha) = 0$.
D) $\alpha > \beta$ y $f(\alpha) \neq 0$.
E) $\alpha < \beta$ y $f(\alpha) \neq 0$.
F) $\alpha > \beta$ y $f(\alpha) = 0$.

Ejercicio 5

Una persona necesita tomar un bus para llegar a Facultad de Ciencias. En la imagen se muestran el origen y destino de la persona, el recorrido del bus, así como la parada inicial y final.
Consideremos la función f que indica la distancia al punto de destino en función del tiempo, desde que se sube al bus hasta que se baja.

A) La función f NO es monótona decreciente, NO es inyectiva y NO tiene raices.
B) La función f es monótona decreciente, NO es inyectiva y tiene al menos una raíz.
C) La función f NO es monótona decreciente, NO es inyectiva y tiene al menos una raíz.
D) La función f es monótona decreciente, NO es inyectiva y NO tiene raices
E) La función f es monótona decreciente, es inyectiva y NO tiene raices.
F) La función f es monótona decreciente, es inyectiva y tiene al menos una raíz.

Ejercicio 6

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada y estrictamente positiva de la cual sabemos además lo siguiente:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una partición P del intervalo $[0,1]$ tal que $S^*(f,P) - S_*(f,P) < \frac{1}{n}$.
- Existe una partición Q del intervalo $[0,1]$ tal que $S^*(f,Q) = 8$.
- $f(x) = 16$ para todo $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

A) f es integrable y $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$.
B) f no es integrable y existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = 8$.
C) f no es integrable y $f(x) > 1$ para todo $x \in [0,1]$.
D) f es integrable y $\int_0^1 f(x)\,dx > 8$.
E) f no es integrable, $I^*(f) = 8$ y $I_*(f) = 4$.
F) f es integrable y $4 < \int_0^1 f(x)\,dx \leq 8$.

Ejercicio 7

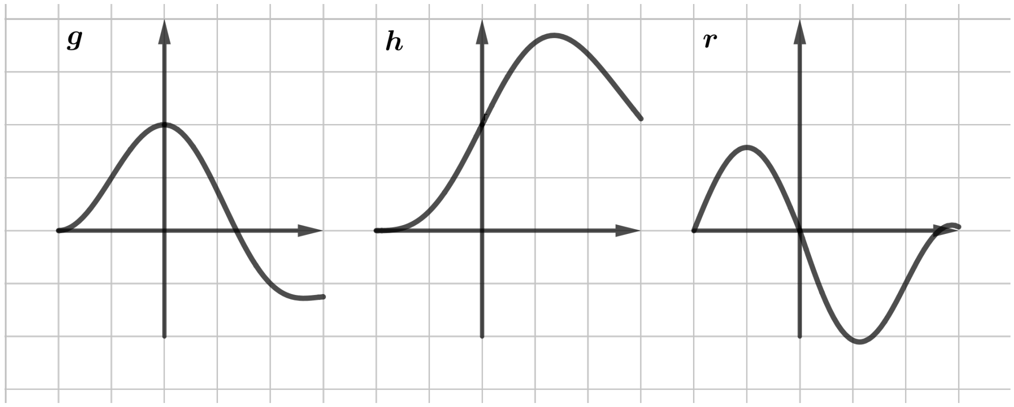
Indicar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}^2(t)\,\mathrm{d}t}{\operatorname{sen}(x) - x}$$

A) 1	C) -2	E) 0
B) -1	D) 2	F) El límite no existe.

Ejercicio 8

En la figura se muestran los gráficos de tres funciones g, h y r. Estas funciones son una función f y sus derivadas f' y f''.

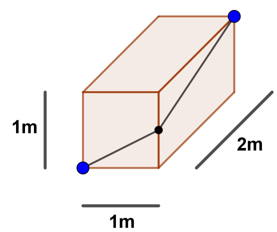


Indicar a cuál gráfico corresponde cada función.

A) $f = g, \quad f' = h, \quad f'' = r$
B) $f = g, \quad f' = r, \quad f'' = h$
C) $f = h, \quad f' = r, \quad f'' = g$
D) $f = r, \quad f' = g, \quad f'' = h$
E) $f = r, \quad f' = h, \quad f'' = g$
F) $f = h, \quad f' = g, \quad f'' = r$

Ejercicio 9

Considere una caja de medidas 1m $\times$ 1m $\times$ 2m. Se quiere agregar un cable a modo de reforzar la estructura. Dicho cable va desde un vértice al vértice opuesto, y debe pasar por una de las caras de la caja que es un cuadrado y otra que es un rectángulo (como se indica en la figura).



¿Cuál es el largo mínimo para dicho cable?

A) 4
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$
D) $\sqrt{2} + 2$
E) $\sqrt{5} + 1$
F) $\sqrt{10}$

Ejercicio 10

Queremos aproximar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$. Para eso, consideramos $P_1(f,0)(0{,}5)$ siendo $f(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$. Recordemos que $P_n(f,a)(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto a.

Indicar la opción correcta.

A) $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \approx 1$ con un error menor a $\frac{1}{2^4}$.

B) $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \approx 1$ con un error menor a $\frac{1}{2^8}$.

C) $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \approx 0$ con un error menor a $\frac{1}{2^4}$.

D) $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \approx 0$ con un error menor a $\frac{1}{2^8}$.

E) $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \approx 0{,}5$ con un error menor a $\frac{1}{2^4}$.

F) $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \approx 0{,}5$ con un error menor a $\frac{1}{2^8}$.