

EXAMEN JULIO 2024 - VERSIÓN 2  
SÁBADO 27 DE JULIO DE 2024

Nro de examen	Cédula	Apellido y nombre

**Información importante:**

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.
- **Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.**

**Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:**

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10

---

**Notación:** En el examen se usa la siguiente notación:

- $S^*(f, P)$  denota la suma superior y  $S_*(f, P)$  la suma inferior de  $f$  con respecto a la partición  $P$ .
  - $I^*(f)$  denota la integral superior:  $I^*(f) = \inf\{S^*(f, P) : P \text{ es partición}\}$ , mientras que  $I_*(f)$  denota la integral inferior:  $I_*(f) = \sup\{S_*(f, P) : P \text{ es partición}\}$
-

**Ejercicio 1**

Indicar el valor de  $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x) dx$ .

- |           |              |              |
|-----------|--------------|--------------|
| A) $\pi$  | C) $2\pi$    | E) $-2\pi$   |
| B) $-\pi$ | D) $\pi - 1$ | F) $1 - \pi$ |
- 

**Ejercicio 2**

Indicar el valor de  $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2 - 1} dx$ .

- |  |  |
|--|--|
| A) $-\frac{1}{2}(1 - \ln(e + 2) + \ln(3))$ | D) $\frac{1}{2}(1 + \ln(e + 2) + \ln(3))$  |
| B) $\frac{1}{2}(1 - \ln(e + 2) + \ln(3))$  | E) $-\frac{1}{2}(1 + \ln(e + 2) + \ln(3))$ |
| C) $\ln(e^2 + 2e) - \ln(3)$                | F) $\frac{1}{e+2} - \frac{1}{3}$           |
- 

**Ejercicio 3**

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones de las cuales sabemos lo siguiente:

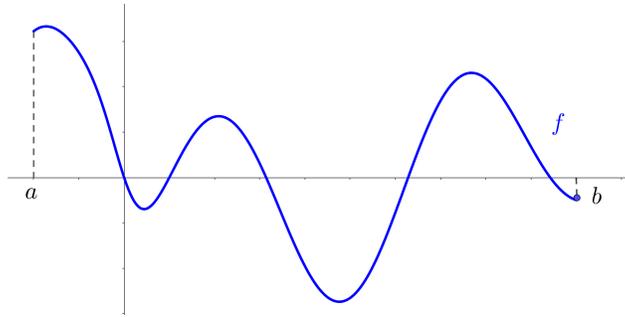
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^3 = 8$

Entonces el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + g(x)$

- |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| A) existe y vale 0 | C) existe y vale 2 | E) no existe       |
| B) existe y vale 4 | D) existe y vale 9 | F) existe y vale 8 |
-

### Ejercicio 4

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la función continua cuyo gráfico se da en la imagen.



Consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in [a, b] / f(x) > 0\} \text{ y } B = \{x \in [a, b] / f(x) < 0\}$$

y sean  $\alpha = \sup(A)$ ,  $\beta = \inf(B)$ .

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A)  $\alpha = \beta$  y  $f(\alpha) = 0$ .

C)  $\alpha < \beta$  y  $f(\alpha) = 0$ .

E)  $\alpha > \beta$  y  $f(\alpha) \neq 0$ .

B)  $\alpha = \beta$  y  $f(\alpha) \neq 0$ .

D)  $\alpha > \beta$  y  $f(\alpha) = 0$ .

F)  $\alpha < \beta$  y  $f(\alpha) \neq 0$ .

### Ejercicio 5

Una persona necesita tomar un bus para llegar a Facultad de Ciencias. En la imagen se muestran el origen y destino de la persona, el recorrido del bus, así como la parada inicial y final.

Consideremos la función  $f$  que indica la distancia al punto de destino en función del tiempo, desde que se sube al bus hasta que se baja.



A) La función  $f$  es monótona decreciente, es inyectiva y tiene al menos una raíz.

B) La función  $f$  es monótona decreciente, NO es inyectiva y tiene al menos una raíz.

C) La función  $f$  NO es monótona decreciente, NO es inyectiva y tiene al menos una raíz.

D) La función  $f$  es monótona decreciente, NO es inyectiva y NO tiene raíces

E) La función  $f$  NO es monótona decreciente, NO es inyectiva y NO tiene raíces.

F) La función  $f$  es monótona decreciente, es inyectiva y NO tiene raíces.

### Ejercicio 6

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y estrictamente positiva de la cual sabemos además lo siguiente:

- Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe una partición  $P$  del intervalo  $[0, 1]$  tal que  $S^*(f, P) - S_*(f, P) < \frac{1}{n}$ .
- Existe una partición  $Q$  del intervalo  $[0, 1]$  tal que  $S^*(f, Q) = 8$ .
- $f(x) = 16$  para todo  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ .

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

- A)  $f$  es integrable y  $\int_0^1 f(x) dx = 4$ .
  - B)  $f$  no es integrable y existe  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = 8$ .
  - C)  $f$  no es integrable y  $f(x) > 1$  para todo  $x \in [0, 1]$ .
  - D)  $f$  es integrable y  $4 < \int_0^1 f(x) dx \leq 8$ .
  - E)  $f$  es integrable y  $\int_0^1 f(x) dx > 8$ .
  - F)  $f$  no es integrable,  $I^*(f) = 8$  y  $I_*(f) = 4$ .
- 

### Ejercicio 7

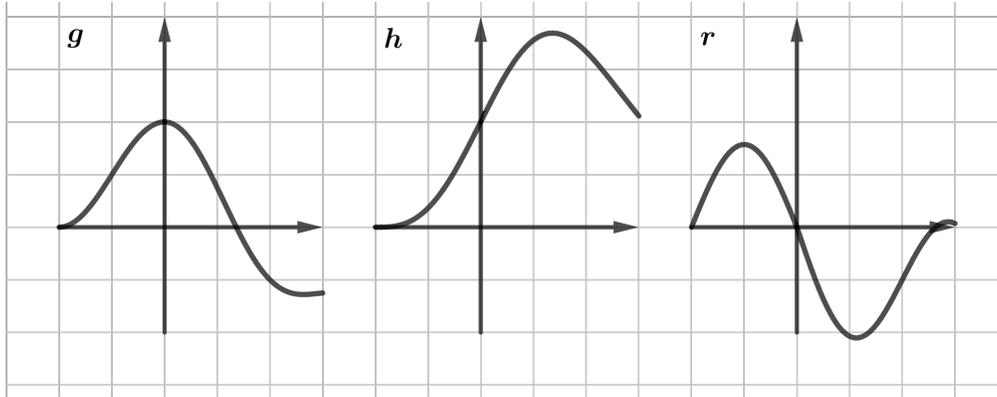
Indicar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}^2(t) dt}{\operatorname{sen}(x) - x}$$

- A)  $-2$
  - B)  $1$
  - C)  $-1$
  - D)  $2$
  - E)  $0$
  - F) El límite no existe.
-

### Ejercicio 8

En la figura se muestran los gráficos de tres funciones  $g$ ,  $h$  y  $r$ . Estas funciones son una función  $f$  y sus derivadas  $f'$  y  $f''$ .

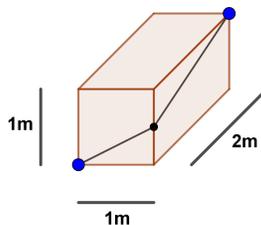


Indicar a cuál gráfico corresponde cada función.

- A)  $f = g$ ,  $f' = h$ ,  $f'' = r$     C)  $f = h$ ,  $f' = r$ ,  $f'' = g$     E)  $f = r$ ,  $f' = g$ ,  $f'' = h$   
 B)  $f = g$ ,  $f' = r$ ,  $f'' = h$     D)  $f = h$ ,  $f' = g$ ,  $f'' = r$     F)  $f = r$ ,  $f' = h$ ,  $f'' = g$

### Ejercicio 9

Considere una caja de medidas  $1\text{m} \times 1\text{m} \times 2\text{m}$ . Se quiere agregar un cable a modo de reforzar la estructura. Dicho cable va desde un vértice al vértice opuesto, y debe pasar por una de las caras de la caja que es un cuadrado y otra que es un rectángulo (como se indica en la figura).



¿Cuál es el largo mínimo para dicho cable?

- A) 4    C)  $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$     E)  $\sqrt{2} + 2$   
 B)  $\frac{1}{3}$     D)  $\sqrt{10}$     F)  $\sqrt{5} + 1$

**Ejercicio 10**

Queremos aproximar el valor de la integral  $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . Para eso, consideramos  $P_1(f, 0)(0,5)$  siendo  $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . Recordemos que  $P_n(f, a)(x)$  es el polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en el punto  $a$ .

Indicar la opción correcta.

- A)  $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0$  con un error menor a  $\frac{1}{28}$ .    D)  $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0,5$  con un error menor a  $\frac{1}{24}$ .  
B)  $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0$  con un error menor a  $\frac{1}{24}$ .    E)  $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 1$  con un error menor a  $\frac{1}{24}$ .  
C)  $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0,5$  con un error menor a  $\frac{1}{28}$ .    F)  $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 1$  con un error menor a  $\frac{1}{28}$ .
-