

EXAMEN JULIO 2024 - VERSIÓN 1
SÁBADO 27 DE JULIO DE 2024

Nro de examen	Cédula	Apellido y nombre

Información importante:

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.
- **Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.**

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10

Notación: En el examen se usa la siguiente notación:

- $S^*(f, P)$ denota la suma superior y $S_*(f, P)$ la suma inferior de f con respecto a la partición P .
 - $I^*(f)$ denota la integral superior: $I^*(f) = \inf\{S^*(f, P) : P \text{ es partición}\}$, mientras que $I_*(f)$ denota la integral inferior: $I_*(f) = \sup\{S_*(f, P) : P \text{ es partición}\}$
-

Ejercicio 1

Indicar el valor de $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x) dx$.

- | | | |
|-----------|------------|--------------|
| A) π | C) 2π | E) $\pi - 1$ |
| B) $-\pi$ | D) -2π | F) $1 - \pi$ |
-

Ejercicio 2

Indicar el valor de $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2 - 1} dx$.

- | | |
|--|--|
| A) $\frac{1}{2}(1 - \ln(e + 2) + \ln(3))$ | D) $\frac{1}{2}(1 + \ln(e + 2) + \ln(3))$ |
| B) $-\frac{1}{2}(1 - \ln(e + 2) + \ln(3))$ | E) $-\frac{1}{2}(1 + \ln(e + 2) + \ln(3))$ |
| C) $\ln(e^2 + 2e) - \ln(3)$ | F) $\frac{1}{e+2} - \frac{1}{3}$ |
-

Ejercicio 3

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de las cuales sabemos lo siguiente:

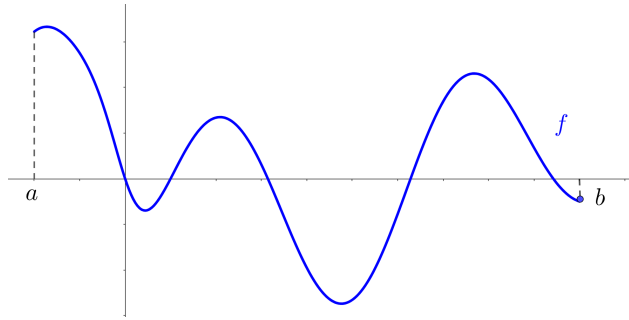
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^3 = 8$

Entonces el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + g(x)$

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| A) existe y vale 0 | C) existe y vale 4 | E) no existe |
| B) existe y vale 2 | D) existe y vale 9 | F) existe y vale 8 |
-

Ejercicio 4

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua cuyo gráfico se da en la imagen.



Consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in [a, b] / f(x) > 0\} \text{ y } B = \{x \in [a, b] / f(x) < 0\}$$

y sean $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \inf(B)$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) $\alpha = \beta$ y $f(\alpha) = 0$.

C) $\alpha > \beta$ y $f(\alpha) = 0$.

E) $\alpha > \beta$ y $f(\alpha) \neq 0$.

B) $\alpha = \beta$ y $f(\alpha) \neq 0$.

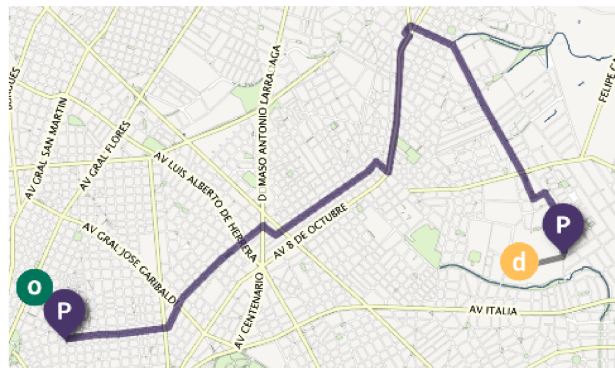
D) $\alpha < \beta$ y $f(\alpha) = 0$.

F) $\alpha < \beta$ y $f(\alpha) \neq 0$.

Ejercicio 5

Una persona necesita tomar un bus para llegar a Facultad de Ciencias. En la imagen se muestran el origen y destino de la persona, el recorrido del bus, así como la parada inicial y final.

Consideremos la función f que indica la distancia al punto de destino en función del tiempo, desde que se sube al bus hasta que se baja.



A) La función f es monótona decreciente, es inyectiva y tiene al menos una raíz.

B) La función f es monótona decreciente, NO es inyectiva y tiene al menos una raíz.

C) La función f NO es monótona decreciente, NO es inyectiva y tiene al menos una raíz.

D) La función f NO es monótona decreciente, NO es inyectiva y NO tiene raíces.

E) La función f es monótona decreciente, NO es inyectiva y NO tiene raíces.

F) La función f es monótona decreciente, es inyectiva y NO tiene raíces.

Ejercicio 6

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y estrictamente positiva de la cual sabemos además lo siguiente:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una partición P del intervalo $[0, 1]$ tal que $S^*(f, P) - S_*(f, P) < \frac{1}{n}$.
- Existe una partición Q del intervalo $[0, 1]$ tal que $S^*(f, Q) = 8$.
- $f(x) = 16$ para todo $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

- A) f es integrable y $\int_0^1 f(x) dx = 4$.
 - B) f no es integrable y existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = 8$.
 - C) f es integrable y $4 < \int_0^1 f(x) dx \leq 8$.
 - D) f no es integrable y $f(x) > 1$ para todo $x \in [0, 1]$.
 - E) f es integrable y $\int_0^1 f(x) dx > 8$.
 - F) f no es integrable, $I^*(f) = 8$ y $I_*(f) = 4$.
-

Ejercicio 7

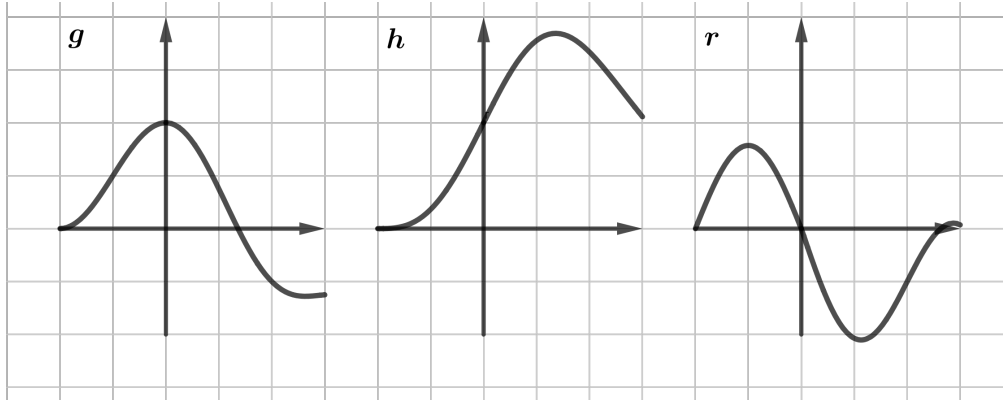
Indicar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}^2(t) dt}{\operatorname{sen}(x) - x}$$

- | | | |
|------|-------|-------------------------|
| A) 0 | C) -1 | E) -2 |
| B) 1 | D) 2 | F) El límite no existe. |
-

Ejercicio 8

En la figura se muestran los gráficos de tres funciones g , h y r . Estas funciones son una función f y sus derivadas f' y f'' .

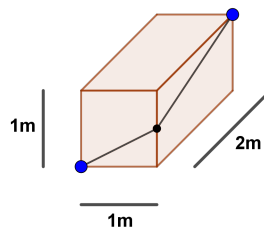


Indicar a cuál gráfico corresponde cada función.

- A) $f = g$, $f' = h$, $f'' = r$ C) $f = h$, $f' = g$, $f'' = r$ E) $f = r$, $f' = g$, $f'' = h$
 B) $f = g$, $f' = r$, $f'' = h$ D) $f = h$, $f' = r$, $f'' = g$ F) $f = r$, $f' = h$, $f'' = g$

Ejercicio 9

Considere una caja de medidas $1\text{m} \times 1\text{m} \times 2\text{m}$. Se quiere agregar un cable a modo de reforzar la estructura. Dicho cable va desde un vértice al vértice opuesto, y debe pasar por una de las caras de la caja que es un cuadrado y otra que es un rectángulo (como se indica en la figura).



¿Cuál es el largo mínimo para dicho cable?

- A) 4 C) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{2} + 2$
 B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ F) $\sqrt{5} + 1$

Ejercicio 10

Queremos aproximar el valor de la integral $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Para eso, consideramos $P_1(f, 0)(0,5)$ siendo $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Recordemos que $P_n(f, a)(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto a .

Indicar la opción correcta.

- A) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0$ con un error menor a $\frac{1}{24}$. D) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0,5$ con un error menor a $\frac{1}{28}$.
B) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0$ con un error menor a $\frac{1}{28}$. E) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 1$ con un error menor a $\frac{1}{24}$.
C) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0,5$ con un error menor a $\frac{1}{24}$. F) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 1$ con un error menor a $\frac{1}{28}$.
-