Matemática Inicial

Solución del examen de julio de 2024

Ejercicio 1 (25pt) *1. Resolver las siguientes inecuaciones en* $\mathbb{R}$.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{49}{9}\right)^{x^2+1}$.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{49}{9}\right)^{x^2+1} \Leftrightarrow 1 \geq \left(\frac{7}{3}\right)^{3x-1}\left(\frac{7}{3}\right)^{2x^2+2} \Leftrightarrow 1 \geq \left(\frac{7}{3}\right)^{2x^2+3x+1} \Leftrightarrow 2x^2+3x+1 \leq 0$$

Factorizamos el miembro de la izquierda y obtenemos que $2x^2+3x+1 = (x+1)(2x+1)$. *Entonces estudiando el signo llegamos a que* $A = [-1, -1/2]$.

b) $\ln(x^2-8) < 0$.

Primeramente estudiamos el dominio de la inecuación. Se tiene que cumplir que $x^2-8 > 0$. *Entonces* $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$. *Ahora* $\ln(x^2-8) < 0$ *si y sólo si* $0 < x^2-8 < 1$. *La primera desigualdad ya la estudiamos. Veamos la segunda, es decir,* $x^2-8 < 1$. *Esta inecuación tiene como solución el intervalo* $(-3, 3)$. *Al intersectar este intervalo con el dominio de la inecuación obtenemos que* $B = (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3)$.

2. *Sea A el conjunto solución de la inecuación (1a) y B el conjunto solución de la inecuación (1b). Determinar* $A^c \cap B$.

   Notar que $A^c = (-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$, *luego comparando los extremos de los intervalos obtenemos que* $A^c \cap B = B$.

Ejercicio 2 (20 pt) *Calcular los siguientes límites. Justificar.*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x - \sqrt{16x^2+3x+1}$.

   Notar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \overbrace{4x}^{\to+\infty} - \overbrace{\sqrt{16x^2+3x+1}}^{+\infty}$. *Por tanto tenemos que operar dentro del límite.*

$$\begin{aligned} 4x - \sqrt{16x^2+3x+1} &= \left(4x - \sqrt{16x^2+3x+1}\right)\left(\frac{4x+\sqrt{16x^2+3x+1}}{4x+\sqrt{16x^2+3x+1}}\right) \\ &= \frac{16x^2 - (16x^2+3x+1)}{4x+\sqrt{16x^2+3x+1}} \\ &= \frac{-3x-1}{4x+\sqrt{16x^2+3x+1}} \end{aligned}$$

   Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} 4x - \sqrt{16x^2+3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{-3x-1}^{\sim -3x}}{\underbrace{4x+\sqrt{16x^2+3x+1}}_{\sim 4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{8x} = \frac{-3}{8}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+\ln(x)}{4x^3+e^{x/2}}$.

Aplicamos ordenes infinitos tanto en numerador como en denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x + \ln(x)}{4x^3 + e^{x/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^3}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{x/2}}_{\to+\infty}} \overset{(*)}{=} 0$$

En $(*)$ *usamos que* $ord(e^{x/2}) > ord(x^3)$.

Ejercicio 3 (21 pt) *Bosquejar el gráfico de una función* $f : (-3, +\infty) \to \mathbb{R}$ *que cumpla simultáneamente todas las condiciones siguientes:*

1. $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
3. *Existe el límite* $\lim_{x\to2} f(x)$ *pero* f *no es continua en* 2.
4. $f'(x) > 0$ *si* $x \in (3, 5)$
5. f *es continua en el intervalo* $(2, 6)$.
6. $f^{-1}(\{1\})$ *tiene exactamente* 2 *elementos. (recordar que* $f^{-1}(\{1\})$ *denota el conjunto preimagen de* 1*).*
7. f *es sobreyectiva.*

Para cada condición se deberá justificar o indicar en el gráfico su cumplimiento.

Ejercicio 4 (22 pt) *Sea* $a \in \mathbb{R}$, *se considera* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^3-x^2-2x} & \text{si } x > 2 \\ -(x-a)^2 e^x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}.$$

1. *Determinar si existe un valor de* a *tal que* f *sea continua en* $x = 2$. *Justificar.*
2. *Para* $a = 3$, *hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de* f *por el punto* $(0, f(0))$.

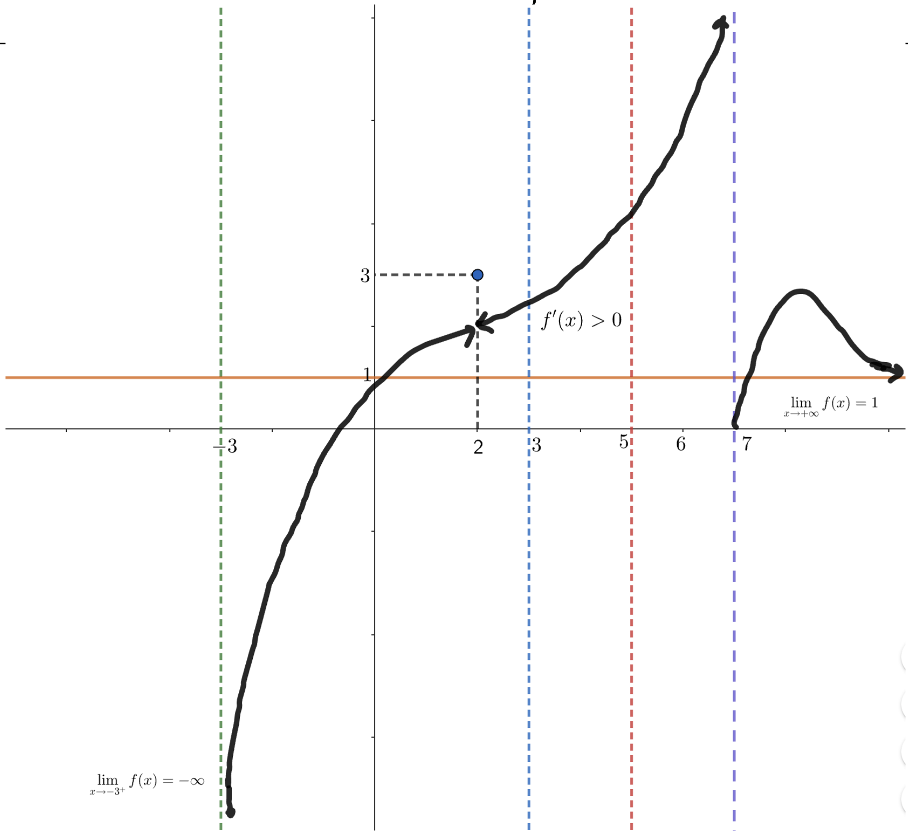

Figura 1: Posible bosquejo de una f que cumple las condiciones.

Solución: 1. Para todo $x > 2$, se observa que

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-x^2-2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{x+2}{x(x+1)}$$

y por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2}{x(x+1)} = \dfrac{2}{3}$. Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(-(x-a)^2 e^x\right) = -(2-a)^2 e^2 = f(2).$$

La función f es continua en $x = 2$ si y solo si los dos límites anteriores coinciden con $f(2)$, es decir: si y solo si $-(2-a)^2 e^2 = \frac{2}{3}$. Pero la ecuación anterior no tiene solución, pues $-(2-a)^2 e^2 \leq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$, mientras $\frac{2}{3} > 0$. Por lo tanto, no existe ningún valor de a tal que f sea continua en $x = 2$.

2. Sea $a = 3$. Para todo $x < 2$, tenemos que $f(x) = -(x-3)^2 e^x$, luego

$$f'(x) = -2(x-3)e^x - (x-3)^2 e^x = -(x-1)(x-3)e^x$$

y entonces $f'(0) = -3e^0 = -3$. Por lo tanto, la recta tangente al gráfico de f en el punto $(0, f(0))$ tiene una ecuación de la forma $y = -3x + b$, donde b es un parámetro que se trata de determinar. Para ello, se observa que el punto $(0, f(0)) = (0, -9)$ pertenece a la recta tangente, es decir: $-9 = -3 \cdot 0 + b$, de tal modo que $b = -9$. En conclusión, la ecuación de la recta tangente es: $y = -3x - 9$.

Ejercicio 5 (12 pt) *Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.*

Solución: Supongamos que:

- f es inyectiva, es decir: para todos $x, x' \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$.
- g es inyectiva, es decir: para todos $x, x' \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(x')$ implica $x = x'$.

Queremos demostrar que la función compuesta $g \circ f$ también es inyectiva. Para ello, se consideran dos puntos $x, x' \in \mathbb{R}$ tales que $g(f(x)) = g(f(x'))$, y queremos probar que $x = x'$. Por hipótesis, tenemos que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Como g es inyectiva, se deduce que $f(x) = f(x')$. Y como f es inyectiva, se deduce de lo anterior que $x = x'$. Esto acaba de demostrar que la función $g \circ f$ es inyectiva.