Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen julio 2024

Solución

26 de julio de 2024

MÚLTIPLE OPCIÓN

Las versiones del examen se identifican por el primer ejercicio de múltiple opción.
Versión 1: El primer ejercicio es “Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ la solución de $z^2 = 2i$ ...”
Versión 2: El primer ejercicio es “El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = e^{x^2-y+1}$ ...”
Las respuestas correctas para cada versión son:

Versión	1	2	3	4	5
1	B	A	A	D	D
2	A	E	D	C	E

DESARROLLO

1. Ejercicio 1

(a) Ver definición 5.24 en las notas del curso.

(b) Ver definición 6.5 en las notas del curso.

(c) Ver demostración del Teorema 6.9 en las notas del curso.

(d) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utilizando el resultado del item anterior, demuestre que f no es continua en el origen.

Podemos tomar la sucesión $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, que claramente tiende al $(0,0)$, y veamos qué sucede con la sucesión $f(x_n, y_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq f(0,0)$, en virtud del resultado del item anterior, la función no es continua en el origen.

---

2. Ejercicio 2

(a) Ver definición 7.12 en las notas del curso.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Estudiar la existencia de derivadas parciales en el origen.

Las derivadas parciales valen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

(c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el origen.

Como el diferencial es cero, el resto coincide con la función. Tenemos que estudiar entonces el siguiente límite

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{r(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \frac{\Delta x\Delta y \sin(\Delta x)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

En coordenadas polares, el límite queda

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos(\theta)\rho\sin(\theta)\sin(\rho\cos(\theta))}{\rho^2}$$

Como tenemos que cuando ρ tiende a cero, el argumento de $\sin(\rho\cos(\theta))$ también tiende a cero, podemos usar el equivalente $\sin(u)\sim u$. Tenemos entonces:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos(\theta)\rho\sin(\theta)\sin(\rho\cos(\theta))}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos(\theta)\rho\sin(\theta)\rho\cos(\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2(\theta)\sin(\theta) = 0,$$

donde usamos que la función de θ es acotada, y multiplica a ρ que tiende a cero.

Por lo tanto la función es diferenciable.

3. Ejercicio 3

Calcule el volumen del sólido delimitado entre $z = x^2+y^2$ y $z = 2-x^2-y^2$.

La superficies son dos paraboloides enfrentados. Hallemos la intersección, usando que z está despejado en ambas ecuaciones:

$$x^2+y^2 = 2-x^2-y^2 \Longrightarrow x^2+y^2 = 1,$$

que es la circunferencia unidad en el plano (x,y). Podemos recorrer entonces el interior de esta circunferencia con coordenadas polares (cilíndricas), y luego la altura varía entre las ecuaciones de los paraboloides, que son $z=\rho^2$ y $z = 2-\rho^2$. Tenemos entonces:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho \; dz d\rho d\theta.$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho \; dz d\rho d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho(2-\rho^2-\rho^2)d\rho \\ &= 4\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \pi. \end{aligned}$$