Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen Julio 2024

26 de julio de 2024

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del examen es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene cinco ejercicios de múltiple opción y tres ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **En el desarrollo, todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.**
- Recuerde que $\sin(x) \sim x$ cuando $x \to 0$.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 60 puntos)

Tres ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.1.c)	D.1.c)	D.2.a)	D.2.b)	D.2.c)	D.3	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ la solución de $z^2 = 2i$, que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^7$ vale:

(A) -1 (B) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ (C) 1 (D) $\frac{2i}{\sqrt{2}^7}$ (E) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

2. Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 2 - 12x$, que verifica $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. Entonces:

(A) $y(1) = e^2 + 2$ (B) $y(1) = e^2 - e^{-3} + 2$ (C) $y(1) = e^2 + e^{-3} - 2$
(D) $y(1) = e^2$ (E) $y(1) = e^{-3} - 2$

3. Considere las funciones

$$f(x, y, z) = \big(e^x + cos(y), \log(xz)\big)\ ,\ g(u, v) = \big((u + cos(v))^2, u + e^v, (u + v)^3\big),$$

y la composición $h = g \circ f$. Entonces el valor de la suma de la primera fila de la matriz Jacobiana de h en el punto $(1, 0, 1)$ es igual a

(A) $2e^2 + 4e$ (B) 0 (C) $\frac{e^3}{4}$ (D) $\log(2)$ (E) $e^2 + 2$

4. El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x, y) = e^{x^2-y+1}$ en el punto $(0, 1)$ es:

(A) $p_2(x, y) = \frac{5}{2} - 2y + 2x^2 + \frac{y^2}{2}$ (B) $p_2(x, y) = 1 - y + 2x^2 + y^2$
(C) $p_2(x, y) = \frac{5}{2} - y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ (D) $p_2(x, y) = \frac{5}{2} - 2y + x^2 + \frac{y^2}{2}$
(E) $p_2(x, y) = 1 - y + x^2 + y^2$

5. Considere los conjuntos del plano $A_1 = ([-1, 1] \times [-1, 1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, y la bola de centro $(2, 0)$ y radio 1, es decir $A_2 = B\left((2, 0), 1\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (2, 0)) < 1\}$, . Sea $A = A_1 \cup A_2$. Entonces:

(A) A es cerrado, y el $(\frac{3}{2}, 0)$ es interior a A.
(B) A es abierto, y el $(1, 0)$ es punto de acumulación de A.
(C) A no es ni cerrado ni abierto, y el $(1, 0)$ es un punto interior a A.
(D) A no es ni cerrado ni abierto, y el $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es un punto de acumulación de A
(E) A no es ni cerrado ni abierto, pero $\bar{A} = A$.

DESARROLLO

1. Ejercicio 1 (25 puntos)

(a) Sea a_n una sucesión en $\mathbb{R}^2$. Definir límite finito de a_n. (Decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ sii ...)

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, y $a \in \mathbb{R}^2$ un punto. Definir continuidad de f en a. (Decimos que f es continua en a sii ...)

(c) Considere el siguiente enunciado.

$$f \text{ es continua en } a \iff \text{para toda sucesión } a_n \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
$$\text{tenemos que } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

Elija una de las direcciones del enunciado (el directo o el recíproco) y demuéstrelo.

(d) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utilizando el resultado del item anterior, demuestre que f no es continua en el origen.

---

2. Ejercicio 2 (20 puntos)

(a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, y $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto. Definir diferenciabilidad de f en a. (Decimos que f es diferenciable en a sii ...)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Estudiar la existencia de derivadas parciales en el origen.

(c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el origen.

---

3. Ejercicio 3 (15 puntos)

Calcule el volumen del sólido delimitado entre $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.