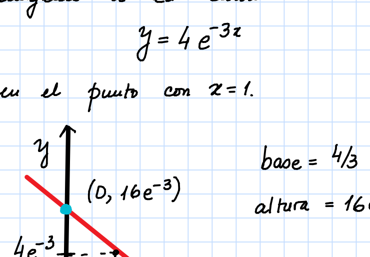
Ej 2, examen dic 2019.

Calcular el área del triángulo encerrado en el cuadrante positivo por la tangente a la curva
$$y=4e^{-3x}$$
en el punto con $x=1$.



base $= 4/3$
altura $= 16e^{-3}$

$y=4e^{-3x}$

La curva de los puntos (x,y) que satisfacen esta ecuación es la gráfica de
$$f(x)=4e^{-3x}.$$
$x=1 \Rightarrow f(x)=4e^{-3}$

$f'(x)=-12e^{-3x} \rightarrow \boxed{f'(1)=-12e^{-3}}$

pendiente de la recta roja

Buscamos la recta de pendiente $-12e^{-3}$ por el punto $(1,4e^{-3})$.

Es
$$y=-12e^{-3}(x-1)+4e^{-3}$$
$$\boxed{y=-12e^{-3}x+16e^{-3}}$$

$x=0 \Rightarrow y=16e^{-3}$

$y=0 \Rightarrow x=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

área $\Delta = \frac{4}{3}\cdot 16e^{-3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{32}{3}e^{-3}$

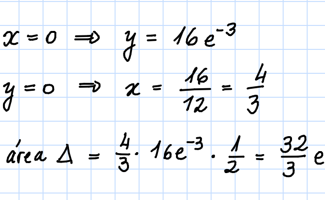
— / —

Propiedad:

$f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable.

$F:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

Entonces F es continua.



F continua en x_0 si
$$\lim_{x\to x_0}F(x)=F(x_0).$$

O sea, si $x\approx x_0$, $F(x)\approx F(x_0)$.

$$\underbrace{|F(x)-F(x_0)|}_{\text{esto también }\approx 0.}=\left|\int_{x_0}^x f\right|\leq\int_{x_0}^x|f|\leq M(x-x_0)$$
si $x\approx x_0$, $x-x_0\approx 0$

— / —

Ej. 2, febrero 2020

r) $y=2x$

r' tangente a $y=e^{a(x^2-1)}$ en el punto con $x=1$.

Hallar a para que r y r' sean paralelas.

Queremos a para que r' tenga pendiente 2.

La curva
$$y=e^{a(x^2-1)}$$
es la gráfica de $f(x)=e^{a(x^2-1)}$.

Cuando $x=1$, $f(x)=1$.

r' es tangente a la gráfica de f en $(1,f(1))$. Su pendiente es $f'(1)$.

$f'(x)=e^{a(x^2-1)}\cdot 2ax$

$f'(1)=2a$; $f(1)=2 \Leftrightarrow a=1$.

— / —

Ej 3, feb 2018 (y reaparece en 2019)

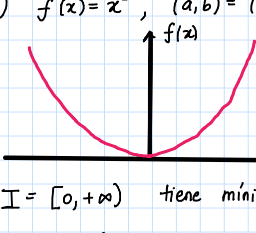
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ continua, $a<b$.

$I=\{y\in\mathbb{R} / \exists x\in\mathbb{R},\ f(x)=y\}$

$J=\{y\in\mathbb{R} / \exists x\in(a,b),\ f(x)=y\}$.

Obs: $J\subset I$.

(A) $f(x)=x^2$, $(a,b)=(1,2)$



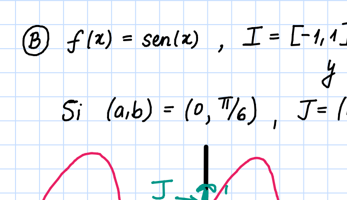
A es falsa.

$I=[0,+\infty)$ tiene mínimo

$J=(1,4)$ no tiene mínimo

(B) $f(x)=\text{sen}(x)$, $I=[-1,1]$ tiene mínimo y máximo.

Si $(a,b)=(0,\pi/6)$, $J=(0,1/2)$.



B es falsa

(C) f es continua en $\mathbb{R}$.

En $[a,b]$, por Weierstrass, f tiene máximo y mínimo. En $[a,b]$, f sí es acotada.

¡Entonces en (a,b) también!

O sea J siempre es acotado.

C es falsa.

Comentario: $tg:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\mathbb{R}$ es continua y NO es acotada. No es una función continua en $\mathbb{R}$. Es decir, tg no se puede extender continuamente a $\mathbb{R}$. No podemos mirar tg en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y aplicar Weierstrass.

(D) Al descartar (A) y (B) dimos ejemplos en los que no pasa.

D es falsa.

(E) En (C), vimos que J es acotado. Tiene inf y sup. En (A) vimos un ejemplo en que J no tiene ni mín ni máx.

E es correcta.

— / —

Ej 3, dic 2019

$f(x)=\text{sen}(3x)\cos(2x)$; queremos polinomio de Taylor en 0 de orden 3.

El polinomio de Taylor de $\text{sen}(x)$ es
$$p(x)=x-\frac{x^3}{3!}$$
El polinomio de Taylor de $\cos(x)$ es
$$q(x)=1-\frac{x^2}{2!}$$
El de $\text{sen}(3x)$ es
$$p(3x)=3x-\frac{(3x)^3}{3!}=$$
$$=3x-\frac{9x^3}{2}.$$
El de $\cos(2x)$ es
$$q(2x)=1-2x^2$$
¿Cómo se calcula el polinomio de Taylor del producto?

(1) Multiplicamos los polinomios.

(2) Borramos los términos de grado >3.

$$\left(3x-\frac{9x^3}{2}\right)\left(1-2x^2\right)=3x-\frac{9x^3}{2}-6x^3$$
+ un término de grado mayor.

El pol. de Taylor de grado 3 de $\text{sen}(3x)\cos(2x)$ es

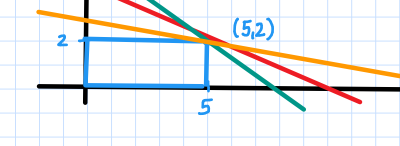
$P_3(x)=3x-\frac{21}{2}x^3$

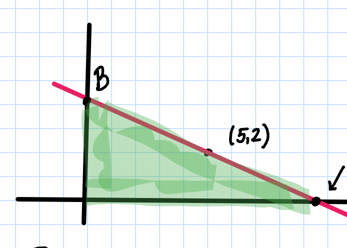
$P_3(1)=3-\frac{21}{2}=-\frac{15}{2}$

Resp: 5.

— / —

Feb 2024





Primera estrategia:

(r) $y=-mx+n$ $(m>0)$

$(5,2)\in r \rightarrow 2=-m\cdot 5+n \rightarrow$

$\rightarrow n=2+5m.$

$$\boxed{y=-mx+(5m+2)\quad (m>0)}$$

$x=0\rightarrow y=5m+2$

$B(0,5m+2)$; la altura del triángulo es $5m+2$.

$y=0 \rightarrow -mx+5m+2=0 \rightarrow$

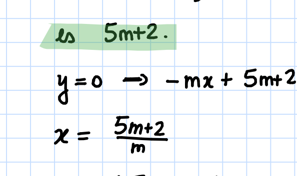
$x=\frac{5m+2}{m}$

$A=\left(\frac{5m+2}{m},0\right)$; la base es $\frac{5m+2}{m}$.

$$\boxed{\text{área}=f(m)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(5m+2)^2}{m}}$$

Hay que hallar el mínimo de f con $m>0$.

Segunda estrategia:



Dado y, ¿cuánto vale x?

El área es $\frac{xy}{2}$.

Hallamos la recta por $(0,y)$ y $(5,2)$.

La cortamos con eje x.

Otra idea geométrica:

El amarillo tiene catetos de long. 5 e $y-2$.

El violeta tiene catetos de long $x-5$ y 2.

$$\underbrace{\frac{x}{y}}_{\text{proporción entre catetos del triángulo grande}}=\underbrace{\frac{5}{y-2}}_{\text{proporción entre catetos del triángulo amarillo}}$$

Usamos que son triángulos semejantes.

$\frac{x}{y}=\frac{5}{y-2}\rightarrow x=\frac{5y}{y-2}.$

$$\boxed{\text{El área es } f(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5y^2}{y-2}}$$

Hay que hallar el mínimo con $y>2$.

— / —

$$\int_0^1\frac{x}{(4x^2+1)(x+1)}\,dx$$

$$\frac{x}{(4x^2+1)(x+1)}=\frac{Ax+B}{4x^2+1}+\frac{C}{x+1}$$
$$=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(4x^2+1)}{(4x^2+1)(x+1)}=$$
$$=\frac{(A+4C)x^2+(A+B)x+(B+C)}{(4x^2+1)(x+1)}$$

$$\rightarrow\begin{cases}A+4C=0\\A+B=1\\B+C=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}B=-C\\A=1-B\\1-5B=0\end{cases}$$

$\Rightarrow B=1/5$

$A=4/5$ ✓

$C=-1/5$

$$f(x)=\frac{4/5\,x+1/5}{4x^2+1}-\frac{1/5}{x+1}\ ✓$$

$$-\frac{1}{5}\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx=-\frac{1}{5}\log(x+1)\Big|_0^1=$$
$$=-\frac{1}{5}\log(2)\ ✓$$

$$\int_0^1\frac{4/5\,x+1/5}{4x^2+1}\,dx=$$
$$=\frac{4}{5}\frac{1}{8}\underbrace{\int_0^1\frac{8x}{4x^2+1}\,dx}+\frac{1}{5}\int_0^1\frac{1}{4x^2+1}\,dx$$

$u=4x^2+1$
$du=8x\,dx$
$x=0\rightarrow u=1$
$x=1\rightarrow u=5$

$$=\frac{1}{10}\int_1^5\frac{1}{u}\,du+\frac{1}{5}\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1\frac{2\cdot 1}{(2x)^2+1}\,dx}$$

$v=2x$
$dv=2\,dx$
$x=0\rightarrow v=0$
$x=1\rightarrow v=2$

$$=\frac{1}{10}\int_1^5\frac{1}{u}\,du+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{v^2+1}\,dv$$
$$=\frac{1}{10}\log(u)\Big|_1^5+\frac{1}{10}\arctan(v)\Big|_0^2=$$
$$=\frac{1}{10}\log(5)+\frac{1}{10}\arctan(2)$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=-\frac{1}{5}\log(2)+\frac{1}{10}\log(5)+\frac{1}{10}\arctan(2)=$$
$$=\frac{1}{10}\arctan(2)+\left[\frac{1}{10}\log(5)-\frac{1}{10}2\cdot\log(2)\right]$$
$$=\frac{1}{10}\arctan(2)+\frac{1}{10}\left[\log(5)-\underbrace{2\log(2)}_{\log(2^2)}\right]=$$
$$=\frac{1}{10}\arctan(2)+\frac{1}{10}\log\left(\frac{5}{4}\right)$$

(A)