GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA LINEAL 2
Resolución del Examen de Julio 2024

July 22, 2024

Respuesta correcta 8 puntos, 0 si no contestan y -1.5 respuesta incorrecta.

A menos que se indique de otro modo, el producto interno en cada caso será el usual.

1	2	3	4	5	6
A	D	A	A	A	A

MO1 Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación horaria de centro (0,0) y ángulo $\pi/2$, S una simetría respecto de la recta $x + y = 0$.

Entonces $S \circ T$ es una:

A) Simetría de eje $\overrightarrow{Ox}$

B) Rotación antihoraria de centro (0,0) y ángulo $\pi/2$.

C) Simetría de eje $\overrightarrow{Oy}$.

D) Rotación horaria de centro (0,0) y ángulo π

Resolución:

Calculando las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a través de la composición tenemos que $(S \circ T)(1,0) = S(T(1,0)) = S(0,-1) = (1,0)$ y del mismo modo $(S \circ T)(0,1) = S(T(0,1)) = S(1,0) = (0,-1)$.

Entonces $(S \circ T)(1,0) = (1,0)$ y $(S \circ T)(0,1) = (0,-1)$ de donde deducimos, por linealidad, que $(S \circ T)(x,y) = (x,-y)$, una simetría de eje $\overrightarrow{Ox}$.

MO2

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Indicar la opción correcta:

A) Existe un único valor de α y un único valor de β para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable.

B) Existe un único valor de α pero infinitos valores de β para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable.

C) Existen exactamente dos valores de α para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

D) Existe un único valor α para el cual la matriz A **NO** es diagonalizable $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Resolución:

Si calculamos $\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ obtenemos $\chi_A(\lambda) = (5-\lambda)(-1-\lambda)(\alpha-\lambda)$.

Si $\alpha \neq -1, \alpha \neq 5$ entonces A tiene sus 3 valores propios distintos y por tanto es diagonalizable.

Veamos entonces los casos donde A **NO** es diagonalizable.

$\alpha = 5$ Esto es, 5 es valor propio con m.a.(5)=2 y tenemos que el subespacio propio asociado $S_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, -6y + \beta z = 0\}$, m.g.(5)=1 sin que β pueda cambiar eso.

Por tanto si $\alpha = 5$, A **NO** diagonalizable cualquiera sea el valor de β.

$\alpha = -1$ Ahora -1 es valor propio con m.a.(-1)=2 y tenemos que el subespacio propio asociado $S_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, \beta z = 0\}$. En este caso el valor de β influye en la m.g.(-1).

Si $\beta = 0$ tenemos $m.g.(-1) = 2$ y A resulta diagonalizable, si $\beta \neq 0$ entonces también $z = 0$ y m.g.(-1)=1 y A resulta **NO** diagonalizable.

En síntesis:

Si $\alpha = 5$, $\forall \beta$, A **NO** diagonalizable.

Si $\alpha = -1, \beta = 0$, A diagonalizable.

Si $\alpha = -1, \beta \neq 0$, A **NO** diagonalizable.

Por tanto existe un único valor α (que es $\alpha = 5$) para el cual A **NO** es diagonalizable $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

MO3

Consideremos $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ y el vector $v = (1,0,1)$.
Indicar la opción correcta:

A) $P_S(v) = \left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

B) $P_S(v) = \left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

C) $P_S(v) = \left(\frac{5}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{4}{3}\right)$.

D) $P_S(v) = \big(0, 0, 0\big)$.

Resolución:

Tenemos que $S = [(-1,0,0),(2,0,1)]$ y por tanto $S^\perp = [(1,1,-2)]$. Si normalizamos obtenemos $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\}$, b.o.n.de $S^\perp$.

Como $\forall v$, $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, entonces $P_S(v) = v - P_{S^\perp}(v)$ por lo que alcanza con hallar $P_{S^\perp}(v)$ y despejar.

Como ya tenemos una b.o.n. de $S^\perp$, $P_{S^\perp}(v) = \langle v, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

Operando se obtiene $P_{S^\perp}(v) = (\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{2}{6})$, de donde $P_S(v) = (\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$.

MO4

Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}[\mathbb{R}]$ simétrica, con $\lambda \neq \mu$ dos valores propios tales que m.a.(λ)=m.g.(μ)=2. Si $\{(1,0,1,1),(0,1,1,1)\} \subset S_\mu$, entonces una base de S_λ es:

A) $\{(1,1,1,-2),(0,0,-1,1)\}$

B) $\{(1,1,-1,1),(1,1,1,1)\}$

C) $\{(1/\sqrt(2), 1/\sqrt(2), \sqrt(2), 2\sqrt(2)), (-1,1,1,-1)\}$

D) $\{(-1/2, 1/2, 1, -1), (2, -2, 1/16, -1/16)\}$

Resolución:

Sabemos que $m.g.(\mu) = 2 \leq m.a.(\mu)$. Como $m.a.(\lambda) = 2$ y χ_A es de cuarto grado, se deduce que las únicas raíces son λ y μ.

A es diagonalizable por ser simétrica.

Como $m.g.(\mu) = \dim(S_\mu) = 2$ y $\{(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$ es LI, tenemos que $\{(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$ es una base de S_μ .

Como $S_\lambda \perp S_\mu$, buscamos $(x,y,z,t) \perp \{(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$, de donde encontramos $S_\lambda = [(1,1,1,-2),(0,0,-1,1)]$.

MO5

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ dada por $T(a + bx + cx^2) = a + 2b - 3c$, $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno $\langle a+bx+cx^2, a'+b'x+c'x^2\rangle = aa' + 2bb' + cc'$. El representante de Riesz de T es:

A) $w : w(x) = 1 + x - 3x^2$

B) $w : w(x) = 1 + 2x - 3x^2$

C) $w = (1, 2, -3)$

D) $w = (1, 1, -3)$

Resolución:

El representante de Riesz de T es el único vector $w \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(p) = \langle p, w\rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

Tomemos $w : w(x) = A + Bx + Cx^2, p : p(x) = a + bx + cx^2$, tenemos que $T(p) = a + 2b - 3c$ y $< p, w >= aA + 2bB + cC$, y esto debe vale para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

Eligiendo, por ejemplo, $p_1 : p_1(x) = 1$, $p_2 : p_2(x) = x$ y $p_3 : p_3(x) = x^2$ tendremos tres ecuaciones $T(p_i) =< p_i, w >, i = 1, 2, 3$ de las que despejamos A, B, C y obtenemos w.

Resolviendo dichas operaciones se obtiene $A = 1, B = 1, C = -3$, de donde $w : w(x) = 1 + x - 3x^2$.

MO6

Sean los EV $\mathbb{R}_1[x]$ con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ y $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, y la transformación lineal $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0), p(1), p(2))$. Sea $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, entonces la adjunta de T es:

A) $T^*(v) = (a + b + c)/2 + (3b/2 + 3c)x$.

B) $T^*(v) = (a + b + c)/3 + (b + 4c)x$.

C) $T^*(v) = (a + b + c)/4 + (3b/4 + 5c)x$.

D) $T^*(v) = (a + b + c)/5 + (3b/5 + 6c)x$.

Resolución:

Como $T^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[x]$, dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ deberá ser
$T^*(a, b, c) = A + Bx$, donde $\langle T(p), (a, b, c)\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle p, T^*(a, b, c)\rangle_{\mathbb{R}_1[x]}$, y esta igualdad se cumple para todo $p \in \mathbb{R}_1[x]$.

Si tomamos $p_1 : p_1(x) = 1$ y $p_2 : p_2(x) = x$, y aplicamos la igualdad anterior, tendremos 2 ecuaciones de las que podremos despejar A y B en función de a, b, c.

Resolviendo dichas operaciones se obtiene $A = \frac{a+b+c}{2}$ y $B = \frac{3}{2}(b + 2c)$, de donde
$T^*(a, b, c) = \frac{a+b+c}{2} + \frac{3}{2}(b + 2c)x$.

1 Ejercicios de desarrollo

Resultados sin explicación y/o justificación carecen de valor, justifique y explique los razonamientos y conclusiones a las que llegue.

Desarrollo 1

Sea $(V, K, +, .)$ un EV de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal .

1. Defina valor propio y vector propio de T:

   Ver teórico.

2. Demuestre que T es invertible si y solo si 0 no es valor propio de T:

   Ver teórico.

3. Demuestre que T es diagonalizable sii existe una base de V formada por vectores propios de T:

   Ver teórico.

4. Sean $A = \{1, 1 + x^2, -2 + x\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}_2[x]$ y $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por: $T(1) = 1$, $T(1 + x^2) = -1 + x^2$, $T(-2 + x) = -1 + x$.

   Investigue si T es invertible, si es diagonalizable y en caso de serlo encuentre una base de vectores propios de T y la forma diagonal:

   Tenemos que $A \xrightarrow{b} \mathbb{R}_2[x]$ y que $T(1) = 1$, que $T(1 + x^2) = -1 + x^2$ y que $T(-2 + x) = -1 + x$.

   Entonces $M =_A (T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\chi_T(\lambda) = |M - \lambda I| = (1 - \lambda)^3$, donde $\lambda = 1$ es raiz triple.

   Operando obtenemos $N(M - I) = [(1, 0, 0), (0, 1, 2)]$ de donde M no es diagonalizable y por lo tanto tampoco lo es T. Por otra parte, T es invertible pues M no tiene valor propio cero, lo cual también se desprende de que $det(M) \neq 0$.

Desarrollo 2

Sea $(V, K, +, ., <, >)$ un EV de dimensión finita y $T : V \to V$ una TL.

1. Enuncie el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos:

   Ver teórico.

2. Demuestre que si T es diagonalizable en una base ortonormal de V y todas las raíces de χ_T son reales entonces T es autoadjunto:

   Ver teórico.

3. Encuentre $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ autoadjunta tal que $T(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)$ y m.a.(3)=2:

Tenemos que $u = (1, -1, 0)$ es vector propio asociado a $\lambda = -1$. Como T es autoadjunta sabemos que es diagonalizable y que los subespacios propios son ortogonales.

Entonces $S_3 = S_{-1}^{\perp} = \{(x, y, z) : x = y\} = [\underbrace{(1, 1, 0)}_{v}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{w}]$.

Tenemos una base de vectores propios $A = \{u, v, w\}$ donde $T(u) = -u,\ T(v) = 3v,\ T(w) = 3w$.

Entonces la T pedida puede darse mediante los valores en una base: $T(1, -1, 0) = (-1, 1, 0),\ T(1, 1, 0) = (3, 3, 0),\ T(0, 0, 1) = (0, 0, 3)$.

Si optamos por expresar T en la base canónica, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ primero hallamos $coord_A(x, y, z)$, obteniendo (cuentas mediante) $coord_A(x, y, z) = (\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}, z)$ y luego, por linealidad, $T(x, y, z) = \frac{x-y}{2}T(u) + \frac{x+y}{2}T(v) + zT(w) = (x + 2y, 2x + y, 3z)$ de lo que

$$T(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, 3z).$$