Universidad de la República — **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL — **Primer Semestre 2024**

EXAMEN - LUNES 22/07/2024

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Múltiple Opción: Total 48 puntos.

Cada respuesta correcta vale 8 puntos; incorrecta: -1,5 puntos; no responde: 0 puntos.
Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros correspondientes.

1	2	3	4	5	6

Ejercicio 1

Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación horaria de centro (0,0) y ángulo $\pi/2$, S una simetría respecto de la recta $x + y = 0$.
Entonces $S \circ T$ es una:

A) Simetría de eje $\overrightarrow{O}x$.
B) Rotación antihoraria de centro (0,0) y ángulo $\pi/2$.
C) Simetría de eje $\overrightarrow{O}y$.
D) Rotación horaria de centro (0,0) y ángulo π.

Ejercicio 2

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.
Indicar la opción correcta:

A) Existe un único valor de α y un único valor de β para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable.
B) Existe un único valor de α pero infinitos valores de β para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable.
C) Existen exactamente dos valores de α para los cuales la matriz A **NO** es diagonalizable $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
D) Existe un único valor α para el cual la matriz A **NO** es diagonalizable $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3

Consideremos $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-2z=0\big\}$ subespacio de $\mathbb{R}^3$ y el vector $v=(1,0,1)$.
Indicar la opción correcta:

A) $P_S(v) = \left(\dfrac{7}{6}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}\right)$.

B) $P_S(v) = \left(\dfrac{-1}{6}, \dfrac{-1}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$.

C) $P_S(v) = \left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{-1}{6}, \dfrac{4}{3}\right)$.

D) $P_S(v) = \big(0,0,0\big)$.

Ejercicio 4

Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}[\mathbb{R}]$ simétrica, con $\lambda \neq \mu$ dos valores propios tales que m.a.(λ)=m.g.(μ)=2.
Si $\{(1,0,1,1),(0,1,1,1)\} \subset S_\mu$, entonces una base de S_λ es:

A) $\{(1,1,1,-2),(0,0,-1,1)\}$

B) $\{(1,1,-1,1),(1,1,1,1)\}$

C) $\{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{2}),(-1,1,1,-1)\}$

D) $\{(-1/2,1/2,1,-1),(2,-2,1/16,-1/16)\}$

Ejercicio 5

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ dada por $T(a+bx+cx^2) = a+2b-3c$, donde $\mathbb{R}_3[x]$ se considera con el producto interno $\langle a+bx+cx^2, a'+b'x+c'x^2\rangle = aa'+2bb'+cc'$. Entonces, el representante de Riesz de T es:

A) $w : w(x) = 1+x-3x^2$

B) $w : w(x) = 1+2x-3x^2$

C) $w = (1,2,-3)$

D) $w = (1,1,-3)$

Ejercicio 6

Se consideran los E.V. $\mathbb{R}_1[x]$ con el producto interno $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ y $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual, y la transformación lineal $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(p) = (p(0),p(1),p(2))$.
Sea $v=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, entonces la adjunta de T es:

A) $T^*(v) = (a+b+c)/2 + (3b/2+3c)x$.

B) $T^*(v) = (a+b+c)/3 + (b+4c)x$.

C) $T^*(v) = (a+b+c)/4 + (3b/4+5c)x$.

D) $T^*(v) = (a+b+c)/5 + (3b/5+6c)x$.

Desarrollo: 52 puntos.

Resultados sin explicación y/o justificación carecen de valor, justifique y explique los razonamientos y conclusiones a las que llegue.

Problema de Desarrollo 1 (30 puntos).

Sea $(V, I\!K, +, .)$ un E.V. y $T : V \to V$ un operador lineal.

1. Defina valor propio vector propio de T.
2. Demuestre que T es invertible si y solo si 0 no es valor propio de T .
3. Demuestre que T es diagonalizable si y solo si existe una base de V formada por vectores propios de T.
4. Sea el E.V. $\mathbb{R}_2[x]$ y $A = \{1, 1 + x^2, -2 + x\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}_2[x]$.
   Se considera $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por: $T(1) = 1$, $T(1+x^2) = -1+x^2$, $T(-2+x) = -1+x$.
   Investigue si T es invertible y/o si es diagonalizable. En caso de serlo, encuentre sus valores propios y una base de $\mathbb{R}_2[x]$ de vectores propios de T.

Problema de Desarrollo 2 (22 puntos).

Sea $(V, I\!K, +, ., <, >)$ un E.V. de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal.

1. Enuncie el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.
2. Demuestre que si T es diagonalizable en una base ortonormal de V y todas las raíces de χ_T son reales entonces T es autoadjunto.
3. Encuentre $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ autoadjunta tal que $T(1, -1, 0) = (-1, 1, 0)$ y $m.a.(3) = 2$.