6 TRANSFORMACIONES LINEALES

Hasta el momento tenemos conocimiento de la teoría de espacios vectoriales. Podemos pensarla como un lenguaje general que nos sirve para describir varias propiedades y resultados que tiene en común conjuntos como $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_n[x]$, entre otros. Primero estudiamos cómo trabajar en los conjuntos anteriores, y después de haber definido el concepto de espacio vectorial y otras nociones y resultados derivados de éste, hemos interpretado lo que significan en los conjuntos $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_n[x]$. Por ejemplo, el concepto de independencia lineal, si bien es universal en el lenguaje de espacios vectoriales, podemos trabajarlo de manera particular en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o $\mathcal{P}_n[x]$ aprovechando la descripción particular que tienen los elementos de estos conjuntos. Sin embargo, es posible que nos hayamos hecho la idea de que los conjuntos anteriores funcionan de manera aislada, es decir, aplicamos en ellos la teoría de espacios vectoriales pero no pensamos en posibles conexiones. Aunque cabe resaltar que sí han tenido lugar, sutilmente, algunas relaciones entre n-uplas, matrices y polinomios. Por ejemplo:

- Supongamos que se nos pide hallar el conjunto solución de $AX = 0_{2\times 1}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

  Podemos pensar en el producto de matrices AX como una función $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que asigna a cada vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el vector en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$AX = (2x + y - 3z, x - y).$$

  Entonces, hallar el conjunto solución del sistema $AX = 0_{2\times 1}$ es equivalente a decir que queremos encontrar los ceros de la función $X \mapsto AX$.

- Siguiendo la tonalidad del ejemplo anterior, supongamos que tenemos un vector fijo en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $(1, 2, 3)$. A partir del producto escalar, podemos construir una función $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \langle (x, y, z), (1, 2, 3)\rangle = x + 2y + 3z \in \mathbb{R}.$$

  Entonces, hallar los ceros de la función anterior es equivalente a encontrar el plano que pasa por el origen y de normal $(1, 2, 3)$

Vemos entonces que sí hay conexión entre la teoría de sistemas de ecuaciones, geometría en espacio y ceros de funciones, y esto no es casual.

En algunas áreas de la matemática es común el estudio de estructuras y relaciones entre éstas. Por ejemplo, parte del Análisis Matemático consiste en el estudio de conjuntos abiertos y funciones continuas entre dichos conjuntos. Los conjuntos abiertos son conjuntos "con estructura", y las funciones continuas son funciones que "preservan estructura". En Álgebra Lineal, los conjuntos con estructura que nos interesan son los espacios vectoriales, y las funciones que preservan la estructura de espacio vectorial son las llamadas transformaciones lineales, que definimos a continuación. Las funciones $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que acabamos de mencionar son ejemplos de éstas.

6.1. El concepto de transformación lineal

Empezamos esta sección definiendo el tipo de funciones entre espacios vectoriales que serán de nuestro interés.

Definición 6.1

Sean $(V, \mathbb{K}, +_V, \cdot_V)$ y $(W, \mathbb{K}, +_W, \cdot_W)$ dos espacios vectoriales y $T\colon V \to W$ una función entre ellos. Se dice que T es una **transformación lineal** si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para todo $v_1, v_2 \in V$, se tiene que
$$T(v_1 +_V v_2) = T(v_1) +_W T(v_2).$$
2. Para todo $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que
$$T(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W T(v).$$

Para el caso en el cual $V = W$, a $T\colon V \to V$ se le denomina **operador lineal**.

Hablando en términos informales, una transformación lineal es una función entre espacios vectoriales que preserva la suma y la multiplicación por escalares.

Observación 6.1

Hemos usando las notaciones $+_V$ y $+_W$, junto con $\cdot_V$ y $\cdot_W$, en la definición anterior para distinguir que del lado izquierdo de las igualdades en 1. y 2., la suma y multiplicación por escalares ocurre en V, mientras que del lado derecho ocurren en W. Sin embargo, más adelante eviaremos sobrecargar la notación de esta manera porque el contexto anterior quedará sobreentendido.

Ejemplo 42. Mostramos algunos ejemplos de transformaciones lineales.

1. La función $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 7x + 5y - 6z)$$
para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En este primer ejemplo haremos la verificación detallada de las propiedades 1. y 2. de la definición anterior. Para $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos:
$$\begin{aligned} T((x, y, z) + (x', y', z')) &= T(x + x', y + y', z + z') \\ &= (2(x + x') - (y + y') + 3(z + z'), 7(x + x') + 5(y + y') - 6(z + z')) \\ &= ((2x - y + 3z) + (2x' - y' + 3z'), (7x + 5y - 6z) + (7x' + 5y' - 6z')) \\ &= (2x - y + 3z, 7x + 5y - 6z) + (2x' - y' + 3z', 7x' + 5y' - 6z') = T(x, y, z) + T(x', y', z'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\alpha\cdot(x,y,z)) &= T(\alpha x,\alpha y,\alpha z) = (2(\alpha x)-(\alpha y)+3(\alpha z), 7(\alpha x)+5(\alpha y)-6(\alpha z))\\ &= (\alpha 2x-\alpha y+\alpha 3z, \alpha 7x+\alpha 5y-\alpha 6z) = (\alpha(2x-y+3z), \alpha(7x+5y-6z))\\ &= \alpha\cdot(2x-y+3z, 7x+5y-6z) = \alpha\cdot T(x,y,z).\end{aligned}$$

2. Para todo espacio vectorial $(V,\mathbb{K},+,\cdot)$, la función identidad $\mathrm{id}\colon V\to V$ dada por

$$\mathrm{id}(v) = v \text{ para todo } v\in V$$

claramente es lineal.

3. Dados dos espacios vectoriales $(V,\mathbb{K},+,\cdot)$ y $(W,\mathbb{K},+,\cdot)$, la función constantemente igual a cero $0\colon V\to W$ dada por

$$0(v) = 0_W \text{ para todo } v\in V$$

claramente es lineal.

4. Recordemos que $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de matrices de orden $m\times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. Sea $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, digamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{mn}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Considere la función $T_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ dada por

$$T(k_1,\ldots,k_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{mn}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix},$$

para todo $(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{K}^n$. Gracias a las propiedades de la multiplicación de matrices, se puede notar que T es lineal.

Vemos entonces que toda matriz induce una transformación lineal. Más adelante se verá que, de hecho, toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita puede ser representada de la forma anterior.

5. Sean $C^0(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y $C^1(\mathbb{R})$ el subespacio de $C^0(\mathbb{R})$ dado por las funciones derivables en $\mathbb{R}$ y con derivada continua. Considere la función $D\colon C^1(\mathbb{R})\to C^0(\mathbb{R})$ dada por

$$D(f) = f',$$

para toda $f\in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, D es lineal, debido a las propiedades de la derivación.

6. Sea $v_0\in\mathbb{R}^3$ un vector fijo. Entonces, la función $T_{v_0}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$T_{v_0}(v) = \langle v_0, v\rangle$$

para todo $v\in\mathbb{R}^3$, es una transformación lineal debido a las propiedades del producto escalar.

7. Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Recordemos que la función de coordenadas en $\mathcal{B}$, $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(-)\colon V \to \mathbb{K}^n$ se define como

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

donde

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

en la única combinación lineal de v en función de los vectores de la base $\mathcal{B}$. Se puede probar que $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(-)$ es una transformación lineal. En efecto, si tomamos además $w \in V$ donde

$$w = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n$$

junto con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las representaciones

$$v + w = (\alpha + \beta_1) \cdot v_1 + \cdots + (\alpha + \beta_n) \cdot v_n \lambda \cdot v \qquad = (\lambda\alpha_1) \cdot v_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n) \cdot v_n$$

como combinaciones lineales de $\mathcal{B}$ son únicas. Entonces,

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v + w) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v) + \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(w),$$

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v).$$

Se pueden notar a partir de la Definición 6.1 anterior los siguientes resultados.

Proposición 6.1: caracterización de transformaciones lineales

Sea $T\colon V \to W$ una función entre espacios vectoriales $(V, \mathbb{K}, +_V, \cdot_V)$ y $(W, \mathbb{K}, +_W, \cdot_W)$. Entonces, T es una transformación lineal si, y sólo si,

$$T(\alpha \cdot v_1 + v_2) = \alpha \cdot T(v_1) + T(v_2), \tag{6.1}$$

para todo $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demostración: Para implicación ($\Rightarrow$), sean $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Considere el vector $\alpha \cdot v_1 + v_2$. Por la propiedad 1. de la Definición 6.1, tenemos que

$$T(\alpha \cdot v_1 + v_2) = T(\alpha \cdot v_1) + T(v_2).$$

Por otro lado, la propiedad 2. de esta misma definición implica que

$$T(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot T(v_1).$$

Por lo tanto, se sigue (6.1).

Para la implicación ($\Leftarrow$), supongamos que se cumple (6.1). Haciendo $\alpha = 1$, se obtiene 1. en la Definición 6.1. Análogamente, se obtiene 2. haciendo $v_2 = 0_V$. $\square$

Proposición 6.2: criterio para saber cuándo una función no es lineal

Dados dos espacios vectoriales $(V, \mathbb{K}, +_V, \cdot_V)$ y $(W, \mathbb{K}, +_W, \cdot_W)$, si $T\colon V \to W$ es una transformación lineal entonces

$$T(0_V) = 0_W.$$

Demostración: Primero, escribimos 0_V como $0_V = 0_V + 0_V$. Luego, como T es lineal, tenemos que

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V).$$

Sumando $-T(0_V)$ a ambos lados de la igualdad, se tiene que $0_W = T(0_V)$. □

Observación 6.2

Valiéndonos del contrarrecíproco del resultado anterior, tenemos que si $T\colon V \to W$ es una función tal que $T(0_V) \neq 0_W$, entonces T no es lineal. Sin embargo, esto no implica que no existan funciones no lineales T para las cuales sí ocurre que $T(0_V) = 0_W$, como veremos en los ejemplos que aparecen a continuación.

Ejemplo 43. Los siguientes son ejemplos de funciones no lineales:

1. La función $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$T(x) = x + 3,$$
para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que $T(0) = 3 \neq 0$.

2. Considere la función rango $\operatorname{rg}\colon \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Si bien $\operatorname{rg}(0_{m\times n}) = 0$, esta función no es lineal. Considere por ejemplo el caso $m = n = 2$ y las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Tenemos que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A + B) = 1$, y por tanto
$$\operatorname{rg}(A + B) \neq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B).$$

3. Lo señalado en el ejemplo anterior también pasa con la función determinante $\det\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

6.2. Subespacios asociados a una transformación lineal

Dada una transformación lineal $T\colon V \to W$, existen un par de conjuntos asociados a T de mucha importancia: el núcleo y la imagen de T, que se definen como sigue.

Definición 6.2

El **núcleo** de T es el subconjunto de V dado por

$$\mathrm{Ker}(T) := \{v \in V \,/\, T(v) = 0_W\}.$$

Es decir, $\mathrm{Ker}(T)$ son los vectores de V que son enviados, a través de T, al elemento neutro de W. Por otro lado, la **imagen** de T se define como el subconjunto de W dado por

$$\mathrm{Im}(T) := \{w \in W \,/\, w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}.$$

Otras notaciones para el núcleo y la imagen de T también utilizadas son $N(T)$ y $T(V)$, respectivamente.

Resulta que $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ no son solamente conjuntos, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 6.3

Para toda transformación lineal $T\colon V \to W$, se tiene que $\mathrm{Ker}(T)$ y $\mathrm{Im}(T)$ son subespacios vectoriales de V y W, respectivamente.

Demostración: Para probar que $\mathrm{Ker}(T)$ es subespacio de V, primero notamos que $0_V \in \mathrm{Ker}(T)$, ya que $T(0_V) = 0_W$ por la Proposición 6.1. Basta entonces demostrar que $\alpha \cdot v + v' \in \mathrm{Ker}(T)$, para todo $v, v' \in \mathrm{Ker}(T)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. En efecto, como T es lineal, tenemos:

$$T(\alpha \cdot v + v') = \alpha \cdot T(v) + T(v') = \alpha \cdot 0_W + 0_W = 0_W.$$

Con respecto a $\mathrm{Im}(T)$, nuevamente por la Proposición 6.1 vemos que $0_W = T(0_V) \in \mathrm{Im}(T)$. Ahora, sean $w, w' \in \mathrm{Im}(T)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Luego, existen $v, v' \in V$ tales que $w = T(v)$ y $w' = T(v')$. Como T es lineal, tenemos que

$$\alpha \cdot w + w' = \alpha \cdot T(v) + T(v') = T(\alpha \cdot v + v') \in \mathrm{Im}(T).$$

$\square$

Ejemplo 44.

1. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ el subespacio formado por todas las funciones derivables. Considere la transformación lineal $D\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dada por

$$D(f) := f'.$$

Sabemos que $f' = 0$ si, y sólo si, f es constante. Entonces, $\mathrm{Ker}(D)$ está formado por todas las funciones constantes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

2. Considere la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z).$$

Sea $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(T)$. Tenemos entonces que $T(x, y, z) = (0, 0)$, es decir,

$$(x + y + z, 2x + 2y + 2z) = (0, 0).$$

Luego, $x + y + z = 0$. Nos queda entonces que

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}.$$

En términos geométricos, vemos que $\mathrm{Ker}(T)$ es el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y con normal $(1, 1, 1)$.

Calculemos ahora la imagen de T. Los vectores pertenecientes a $\mathrm{Im}(T)$ son todos aquéllos de la forma $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$ para algún $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Luego,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x+y+z, 2x+2y+2z) = (x, 2x) + (y, 2y) + (z, 2z) = x \cdot (1,2) + y \cdot (1,2) + z \cdot (1,2) \\ &= (x+y+z) \cdot (1,2). \end{aligned}$$

Vemos entonces que $\mathrm{Im}(T) \subseteq [(1, 2)]$. Por otro lado, $(1, 2) \in \mathrm{Im}(T)$ ya que $(1, 2) = T(1, 0, 0)$. Por lo tanto, podemos concluir que $\mathrm{Im}(T) = [(1, 2)]$.

Tenga en cuenta para más adelante que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 2 + 1 = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

3. Sea $T\colon \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal dada por

$$T(M) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M, \text{ para toda } M \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}).$$

Determinemos $\mathrm{Ker}(T)$. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix}.$$

De la igualdad anterior se tiene que $a = c$ y $b = d$. Entonces,

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Ahora determinemos la imagen de T. Utilicemos el mismo procedimiento del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} T(M) &= \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -2a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (a-c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + (b-d) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vemos entonces que

$$\mathrm{Im}(T) \subseteq \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right].$$

Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right),$$

por lo cual podemos concluir que

$$\mathrm{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right].$$

Tenga en cuenta para más adelante que

$$\dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4 = 2 + 2 = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Una aplicación importante del concepto de núcleo es que nos permite clasificar cuándo una transformación lineal es inyectiva.

Proposición 6.4

Una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva si, y sólo si, $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.

Demostración: Supongamos primero que T es inyectiva. Sea $v \in \mathrm{Ker}(T)$, es decir, $T(v) = 0_W$. Sabemos además que $T(0_V) = 0_W$. Luego,

$$T(v) = T(0_V).$$

Como T es una función inyectiva, lo anterior implica que $v = 0_V$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.

Ahora supongamos que $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$. Sean $v_1, v_2 \in V$ tales que $T(v_1) = T(v_2)$. Para que T sea inyectiva, debe cumplirse que $v_1 = v_2$. Por otro lado, como T es lineal, la igualdad $T(v_1) = T(v_2)$ implica que

$$T(v_1 - v_2) = 0_W,$$

es decir, $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$. Entonces, $v_1 - v_2 = 0_V$, es decir, $v_1 = v_2$. $\square$

Definición 6.3

Una transformación lineal $T : V \to W$ es un **isomorfismo** si T es biyectiva (es decir, inyectiva y sobreyectiva a la vez). En tal caso, diremos que V y W son espacios **isomorfos**.

Ejemplo 45. Dado un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V (de donde $\dim(V) = n$), los espacios V y $\mathbb{K}^n$ son isomorfos. Concretamente, el isomorfismo viene dado por la función $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(-)$.

6.3. Conjuntos linealmente independientes, generadores, y su relación con las transformaciones lineales

Cuando estudiamos los subespacios generados por un conjunto finito de vectores, nos quedamos con la idea de que se pueden describir a todos los vectores en dicho subespacio con poca información, a saber, los vectores del conjunto generador. Un funcionamiento similar ocurre con las transformaciones lineales.

Para conocer cómo se define una transformación lineal $T\colon V \to W$ en cualquier vector de su dominio, basta con conocer únicamente cómo está definida T en cada vector de cualquier base de V. Veamos esto con un ejemplo para después formalizarlo.

Ejemplo 46. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal de la cual se sabe que

$$T(1,0,0) = (1,-1),\ \ T(1,1,0) = (2,-1)\ \text{ y }\ T(1,1,1) = (2,1).$$

Determine el valor de $T(3,1,2)$. Más aún, hallar la expresión analítica $T(x,y,z)$ para todo (x,y,z).

Primero, notamos que $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, por lo cual

$$(3,1,2) = 2\cdot(1,0,0) + (-1)\cdot(1,1,0) + 2\cdot(1,1,1).$$

Luego, como T es lineal, se tiene que

$$\begin{aligned} T(3,1,2) &= 2\cdot T(1,0,0) + (-1)\cdot T(1,1,0) + 2\cdot T(1,1,1) = 2\cdot(1,-1) - (2,-1) + 2\cdot(2,1) \\ &= (2,-2) + (-2,1) + (4,2) = (4,1). \end{aligned}$$

De manera más general, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ arbitrario, al determinar sus coordenadas en función de x, y y z respecto a la base dada obtenemos

$$(x,y,z) = (x-y)\cdot(1,0,0) + (y-z)\cdot(1,1,0) + z\cdot(1,1,1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x-y)\cdot T(1,0,0) + (y-z)\cdot T(1,1,0) + z\cdot T(1,1,1) \\ &= (x-y)\cdot(1,-1) + (y-z)\cdot(2,-1) + z\cdot(2,1) \\ &= (x-y+2y-2z+2z, y-x+z-y+z) \\ &= (x+y, 2z-x). \end{aligned}$$

De manera más general, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.1

Sea V un espacio vectorial finito-dimensional con base $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$. Dado otro espacio vectorial W con $w_1,\ldots,w_n \in W$, entonces existe una única transformación lineal $T\colon V \to W$ tal que

$$T(v_1) = w_1,\ \ \ldots,\ \ T(v_n) = w_n.$$

En otras palabras, una transformación lineal está unívocamente determinada por el valor que toma en los vectores de cualquier base de su dominio.

Idea de la demostración: Se puede construir T a partir de las asignaciones $v_1 \mapsto w_1, \ldots, v_n \mapsto w_n$, y luego se define T para todo $v \in V$ "extendiendo por linealidad", y sin ambigüedad, ya que v es combinanición lineal única de $\{v_1,\ldots,v_n\}$. $\square$

Demostración: Sea $v \in V$. Entonces, existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ únicos tales que

$$v = \alpha_1\cdot v_1 + \cdots + \alpha_n\cdot v_n.$$

Se define $T\colon V \to W$ como

$$T(v) := \alpha_1\cdot w_1 + \cdots + \alpha_n\cdot w_n.$$

Como las coordenadas de cada vector de V en la base $\mathcal{B}$ son únicas, la función anterior define claramente una transformación lineal.

Para verificar la unicidad de T, supongamos que $S\colon V \to W$ es una transformación lineal que satisface

$$S(v_1) = w_1, \ \ldots, \ S(v_n) = w_n.$$

Luego, para $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in V$ tenemos que

$$T(v) = \alpha_1 \cdot w_1 + \cdots + \alpha_n \cdot w_n = \alpha_1 \cdot S(v_1) + \cdots + \alpha_n \cdot S(v_n) = S(\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) = S(v).$$

Por lo tanto, $T = S$. $\square$

Vista entonces una primera relación entre los conceptos de transformación lineal y base, pasemos ahora a estudiar qué ocurre con los conjuntos generadores o linealmente independientes. Un par de preguntas que podemos hacernos al respecto son: (1) ¿Toda transformación lineal preserva o refleja conjuntos linealmente independientes?, (2) ¿y conjuntos generadores?.

Proposición 6.5

Sean $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ espacios vectoriales y $T\colon V \to W$ una transformación lineal, donde $\dim(V) < \infty$. Entonces, dado un conjunto finito $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores en V, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si $\mathcal{B}$ genera a V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ genera a $\mathrm{Im}(T)$.
2. Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente, entonces $\mathcal{B}$ también lo es. Si además T es inyectiva, se cumple también el recíproco, es decir, que $\mathcal{B}$ linealmente independiente implica que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente.
3. Si T es un isomorfismo y $\mathcal{B}$ es base de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es base de W.

Demostración:

1. Sea $T(v) \in \mathrm{Im}(T)$. Como $\mathcal{B}$ genera a V, se tiene que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Luego, como T es lineal, se tiene que

$$T(v) = \alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n) \in [T(v_1), \ldots, T(v_n)].$$

Por lo tanto, $\mathrm{Im}(T) \subseteq [T(v_1), \ldots, T(v_n)]$. Por otro lado, como claramente $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in \mathrm{Im}(T)$, la contención contraria también se cumple, y entonces

$$\mathrm{Im}(T) = [T(v_1), \ldots, T(v_n)].$$

2. Supongamos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente. Para probar que $\mathcal{B}$ también lo es, supongamos que tenemos 0_V escrito como la siguiente combinación lineal

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V.$$

Debemos entonces demostrar que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. A partir de la igualdad anterior, usando la linealidad de T, se tiene que

$$\alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n) = 0_W.$$

Como $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente, se sigue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, tal como queríamos demostrar. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

Ahora supongamos que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, con la hipótesis adicional de que T es inyectiva. Para demostrar que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente, debemos ver que la combinación lineal

$$\lambda_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \lambda_n \cdot T(v_n) = 0_W$$

es la trivial, es decir, con $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Como T es lineal, podemos reescribir la igualdad anterior como

$$T(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n) = 0_W.$$

Sabiendo que T es inyectiva, tenemos por la Proposición 6.2 que

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V.$$

Por otro lado, como $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, nos queda finalmente que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

3. Esta parte es consecuencia de los puntos 1. y 2. anteriores. Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de V. En particular, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Como T es inyectiva, tenemos que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente. Por otro lado, $\mathcal{B}$ además genera a V, por lo cual $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera a $\mathrm{Im}(T)$. Pero como T es sobreyectiva, se tiene que $\mathrm{Im}(T) = W$. Entonces, $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente que genera a W, es decir, es una base de W.

$\square$

Observación 6.3

Note que en general si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ no necesariamente lo es. Por ejemplo, si T es la transformación lineal constantemente igual a cero, el conjunto $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\} = \{0_W\}$ claramente es linealmente dependiente. Es por eso que en la afirmación 2. del teorema anterior se requiere que T sea inyectiva.

6.4. Teorema de las dimensiones

El núcleo y la imagen de una transformación lineal están relacionados a través del siguiente resultado.

Teorema 6.2

Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales, donde $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$. Entonces,

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)).$$

Idea de la demostración: Se considerará una base de $\mathrm{Ker}(T)$, digamos $\{v_1, \dots, v_k\}$, para completarla a una base de V agregando $v_{k+1}, \cdots v_n$. La idea luego es probar que $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$. Hay casos donde no se puede considerar una base de $\mathrm{Ker}(T)$ para luego completarla a una base de V, por ejemplo cuando $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$. Entonces, la demostración que se muestra a continuación se hace analizando varios casos. $\square$

Demostración:

1. Caso $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$: En este caso, T es inyectiva. Por lo cual, por la Proposición 6.3, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$. Por lo tanto, se cumple claramente la igualdad mostrada en el enunciado.

2. Caso $\mathrm{Ker}(T) = V$: En este caso, T resulta ser la transformación lineal constantemente igual a cero. Luego, $\mathrm{Im}(T) = \{0_W\}$ y $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) = 0$. Por lo tanto, se cumple claramente la igualdad mostrada en el enunciado.

3. Caso $\{0_V\} \subsetneq \mathrm{Ker}(T) \subsetneq V$: Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de $\mathrm{Ker}(T)$, con $k = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(T)) \geqslant 1$ ya que $\{0_V\} \subsetneq \mathrm{Ker}(T)$. Como además $\mathrm{Ker}(T) \subsetneq V$, podemos completar $\{v_1, \ldots, v_k\}$ a una base de V, digamos
$$\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\},$$
siendo $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

   - $\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$: Veamos primero que $\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ genera a $\mathrm{Im}(T)$. Sea $T(v) \in \mathrm{Im}(T)$. Luego, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que
$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$
Al aplicar T, como $v_1, \ldots, v_k \in \mathrm{Ker}(T)$, se tiene que
$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_k \cdot T(v_k) + \alpha_{k+1} \cdot T(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n) \\ &= \alpha_{k+1} \cdot T(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n). \end{aligned}$$
Vemos así que $\mathrm{Im}(T) = [T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)]$. Falta por demostrar que $\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente. Supongamos que tenemos la combinación lineal
$$\lambda_{k+1} \cdot T(v_{k+1}) + \cdots + \lambda_n \cdot T(v_n) = 0_W$$
con $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Luego,
$$T(\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \lambda_n \cdot v_n) = 0_W.$$
Entonces, $\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \lambda_n \cdot v_n \in \mathrm{Ker}(T)$. Como $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es base de $\mathrm{Ker}(T)$, tenemos que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tales que
$$\lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k.$$
Es decir,
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k - \lambda_{k+1} \cdot v_{k+1} - \cdots - \lambda_n \cdot v_n = 0_V.$$
Como $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente, se tiene que
$$\lambda_1 = 0,\ \ldots,\ \lambda_k = 0,\ \lambda_{k+1} = 0,\ \ldots,\ \lambda_n = 0.$$
Por lo tanto, $\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente.

   Para concluir, como $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es base de $\mathrm{Ker}(T)$, $\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}(T)$, y $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es base de V, se tiene que
$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n = k + (n-k) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(T)) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)).$$

$\square$

Ejemplo 47.

1. Sea $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = 5y \text{ y } z = 7w\}.$$

   Demuestre que T es sobreyectiva.

   Una manera de probar que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Im}(T)$ es verificando que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, ya que sabemos que $\mathrm{Im}(T)$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$. Esto lo podemos hacer mediante el teorema de las dimensiones. En efecto,

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{R}^4) &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 4 &= \dim(\{(5y, y, 7w, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y, w \in \mathbb{R}\}) + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 4 &= 2 + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 2 &= \dim(\mathrm{Im}(T)).\end{aligned}$$

2. Demuestre que no existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ con núcleo igual a

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \,:\, x = 3y, \text{ y } z = w = t\}.$$

   Supongamos que existe una tal transformación lineal T. Entonces,

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{R}^5) &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 5 &= \dim(\{(3y, y, z, z, z) \in \mathbb{R}^5 \,:\, y, z \in \mathbb{R}\})\\ 5 &= 2 + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 3 &= \dim(\mathrm{Im}(T)).\end{aligned}$$

   Lo anterior es una contradicción, pues al ser $\mathrm{Im}(T)$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$, forzosamente se tiene que $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leqslant 2$.

Observación 6.4

Sean $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ espacios vectoriales de dimensión finita.

1. Si $\dim(V) > \dim(W)$, entonces ninguna transformación lineal $T\colon V \to W$ es inyectiva.

   En efecto, supongamos que existe una transformación lineal $T\colon V \to W$ inyectiva. Luego, $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$. Entonces,

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T)) \leqslant \dim(W),$$

   lo cual es una contradicción.

2. Si $\dim(V) < \dim(W)$, entonces ninguna transformación lineal $T\colon V \to W$ es sobreyectiva.

   En caso de existir tal transformación lineal, se tendría que $\dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(T))$. Luego,

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(W) \geqslant \dim(W),$$

   lo cual es una contradicción.

6.5. Estructura vectorial de las transformaciones lineales

Si fijamos dos espacios vectoriales $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$, es natural preguntarnos que tipo de operaciones podemos hacer con dos transformaciones lineales $T, S\colon V \to W$. Así como sumamos y multiplicamos funciones por escalares en los cursos de cálculo, para luego estudiar propiedades asociadas, algo similar podemos hacer con las transformaciones lineales. Específicamente, si consideramos el conjunto

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T\colon V \to W \;/\; T \text{ es lineal}\},$$

claramente distinto del vacío ya que la transformación lineal constantemente igual a cero es uno de sus elementos, podemos demostrar que $\mathcal{L}(V, W)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Esto es consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 6.6: álgebra de transformaciones lineales

Si $T, S\colon V \to W$ son transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$, y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces la suma $T + S\colon V \to W$ y la multiplicación por un escalar $\alpha \cdot T\colon V \to W$ también lo son.

Demostración: Primero recordemos cómo están definidas las funciones $T+S\colon V \to W$ y $\alpha \cdot T\colon V \to W$. Para todo $v \in V$, tenemos que

$$(T + S)(v) := T(v) + S(v) \;\text{ y }\; (\alpha \cdot T)(v) := \alpha \cdot T(v).$$

Ahora, sean $v, v' \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces, como T y S son lineales, y por la Proposición 6.1 se tiene que

$$\begin{aligned}(T + S)(\lambda \cdot v + v') &= T(\lambda \cdot v + v') + S(\lambda \cdot v + v') = [\lambda \cdot T(v) + T(v')] + [\lambda \cdot S(v) + S(v')] \\ &= \lambda \cdot [T(v) + S(v)] + [T(v') + S(v')] = \lambda \cdot (T + S)(v) + (T + S)(v'), \\ (\alpha \cdot T)(\lambda \cdot v + v') &= \alpha \cdot T(\lambda \cdot v + v') = \alpha \cdot (\lambda \cdot T(v) + T(v')) = \alpha\lambda \cdot T(v) + \alpha \cdot T(v') \\ &= \lambda \cdot (\alpha \cdot T(v)) + \alpha \cdot T(v') = \lambda \cdot (\alpha \cdot T)(v) + (\alpha \cdot T)(v').\end{aligned}$$

Nuevamente por la Proposición 6.1, se tiene que $T + S$ y $\alpha \cdot T$ son transformaciones lineales. □

Otra pregunta natural es si, dadas dos transformaciones lineales conformables (es decir, que se puedan componer), el resultado de la composición es también lineal. La respuesta es que sí, como demostraremos a continuación.

Proposición 6.7: composición de transformaciones lineales

Si $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to U$ son transformaciones lineales entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, entonces la composición $S \circ T\colon V \to U$ también lo es.

Demostración: La idea de nuevo es aplicar la Proposición 6.1 tanto a T como a S. Entonces, para $v, v' \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\lambda \cdot v + v') &= S(T(\lambda \cdot v + v')) = S(\lambda \cdot T(v) + T(v')) = \lambda S(T(v)) + S(T(v')) \\ &= \lambda \cdot (S \circ T)(v) + (S \circ T)(v').\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S \circ T$ es lineal. □

6.6. Matriz asociada a una transformación lineal

Supongamos que tenemos dos espacios vectoriales $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ con $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$. Fijamos bases

$$\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ y } \mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

de V y W, respectivamente. Ahora, sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Veamos cómo hallar una representación matricial para T usando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Por el Ejemplo 43, podemos considerar:

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definición 6.4

La **representación matricial** de $T\colon V \to W$ en las bases $\mathcal{A} \subseteq V$ y $\mathcal{B} \subseteq W$ (o **matriz asociada** a T en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$) es la matriz

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} &:= \begin{pmatrix} \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) & \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) & \cdots & \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cuya i-ésima columna es el vector $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_i))$.

Veamos ejemplos sobre cómo calcular ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ a partir de T, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dados.

Ejemplo 48.

1. Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y la transformación lineal T_A definida en el Ejemplo 43 (3). Note que la matriz asociada a T_A en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es precisamente A.

2. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = (x + y, 2z - x).$$

   (i) Si $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ denota las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, encuentre la matriz de T en $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$.

   (ii) Si consideramos las bases $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$, donde

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, -1), & v_2 &= (1, 1, 1), & v_3 &= (1, 0, 0), \\ w_1 &= (0, 1), & w_2 &= (1, 0), \end{aligned}$$

   encuentre la matriz asociada a T en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Resolvamos primero lo que concierne a representaciones en bases canónicas. Recordemos que $\mathcal{E}_3$ viene dada por los vectores

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1);$$

mientras que $\mathcal{E}_2$ viene dada por los vectores

$$\epsilon_1 = (1, 0), \qquad \epsilon_2 = (0, 1).$$

Primero calculamos $T(e_1)$, $T(e_2)$ y $T(e_3)$, y escribimos los resultados en términos $\mathcal{E}_2$.

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= (1 + 0, 2 \cdot 0 - 1) = (1, -1) = 1 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1),\\
T(e_2) &= (0 + 1, 2 \cdot 0 - 0) = (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1),\\
T(e_3) &= (0 + 0, 2 \cdot 1 - 0) = (0, 2) = 0 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1).
\end{aligned}$$

Tenemos entonces los siguientes vectores de coordenadas:

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{E}_2}(T(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{E}_2}(T(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{E}_2}(T(e_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz asociada a T en bases canónicas es:

$$_{\mathcal{E}_2}((T))_{\mathcal{E}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora que al cambiar las bases a considerar, va a cambiar la matriz de representación de T. Para las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$[1] de la parte (ii), tenemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= (1 + 0, 2 \cdot (-1) - 1) = (1, -3) = -3 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 0),\\
T(v_2) &= (1 + 1, 2 \cdot 1 - 1) = (2, 1) = 1 \cdot (0, 1) + 2 \cdot (1, 0),\\
T(v_3) &= (1 + 0, 2 \cdot 0 - 1) = (1, -1) = (-1) \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 0),
\end{aligned}$$

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sea $P \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación lineal dada por

$$P(z_1, z_2) = (z_1, 0).$$

Considere a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, con bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ como la base canónica, y $\mathcal{B}_2 = \{(1, i), (-i, 2)\}$. Hallar $_{\mathcal{B}_2}((P))_{\mathcal{B}_1}$ y $_{\mathcal{B}_1}((P))_{\mathcal{B}_2}$.

Para hallar $_{\mathcal{B}_2}((P))_{\mathcal{B}_1}$, tenemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
P(1, 0) &= (1, 0) = 2 \cdot (1, i) + (-i) \cdot (-i, 2),\\
P(0, 1) &= (0, 0) = 0 \cdot (1, i) + 0 \cdot (-i, 2),
\end{aligned}$$

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}_2}(P(1, 0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}_2}(P(0, 1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[1]Tenga en cuenta que $\mathcal{B}$ no es la base canónica $\mathcal{E}_2$ de $\mathbb{R}^2$. A pesar de que ambas tienen los mismos vectores, el orden en el que aparecen es diferente.

$$_{\mathcal{B}_2}((P))_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para hallar $_{\mathcal{B}_1}((P))_{\mathcal{B}_2}$, tenemos:

$$P(1,i) = (1,0) = 1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1),$$
$$P(-i,2) = (-i,0) = -i \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1),$$

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}_1}(P(1,i)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{B}_1}(P(-i,2)) = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$_{\mathcal{B}_1}((P))_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo sirve para darnos cuenta que para operadores lineales $T\colon V \to V$, si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de V, entonces el orden de estas bases puede alterar la forma de la matriz asociada de T, es decir, $_{\mathcal{B}_2}((T))_{\mathcal{B}_1}$ no necesariamente coincide con $_{\mathcal{B}_1}((T))_{\mathcal{B}_2}$.

Dada una transformación lineal $T\colon V \to W$ entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W, con bases $\mathcal{A}$ de V y $\mathcal{B}$ de W, es fácil ver que $_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ está completamente determinada por T, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. En otras palabras, y como vimos en uno de los ejemplos, si cambiamos $\mathcal{A}$ por otra base $\mathcal{A}'$ de V y $\mathcal{B}$ por otra base $\mathcal{B}'$ de W, entonces la matriz $_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ es diferente a la de $_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$. (Más adelante veremos cómo se relacionan estas dos matrices).

Otra cosa que podemos notar es que tenemos una asignación

$$(T,\mathcal{A},\mathcal{B}) \rightsquigarrow {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

Cabe preguntarse ahora si, en el caso en el que se nos dan $_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, es posible hallar la expresión que define a T. Terminamos esta sección dando una respuesta afirmativa a esto.

Ejemplo 49. Hallar la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ tienes como bases a

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(2,0,0),(0,1,0)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B} = \{(2,-1),(0,2)\},$$

y sabiendo que

$$_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tomemos un vector arbitrario $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Queremos hallar una fórmula para $T(x,y,z)$ (que sea lineal, por supuesto). Primero, escribimos a (x,y,z) como combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{A}$:

$$(x,y,z) = z \cdot (1,0,1) + \frac{(x-z)}{2} \cdot (2,0,0) + y \cdot (0,1,0).$$

Ahora, aplicamos T a la expresión anterior:

$$T(x,y,z) = z \cdot T(1,0,1) + \frac{(x-z)}{2} \cdot T(2,0,0) + y \cdot T(0,1,0).$$

Entonces, para hallar $T(x,y,z)$, basta con conocer $T(1,0,1)$, $T(2,0,0)$ y $T(0,1,0)$. Aunque no conocemos dichos valores, sí sabemos cuales son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$ (información que aparece en la matriz $_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$):

$$T(1,0,1) = 2 \cdot (2,-1) + 1 \cdot (0,2) = (4,-2) + (0,2) = (4,0),$$
$$T(2,0,0) = 3 \cdot (2,-1) + 0 \cdot (0,2) = (6,-3) + (0,0) = (6,-3),$$
$$T(0,1,0) = -1 \cdot (2,-1) + 2 \cdot (0,2) = (-2,1) + (0,4) = (-2,5).$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned}T(x,y,z) &= z\cdot(4,0)+\frac{(x-z)}{2}\cdot(6,-3)+y\cdot(-2,5)\\&=(4z,0)+\left(3x-3z,\frac{3z-3x}{2}\right)+(-2y,5y)\\&=\left(3x-2y+z,-\frac{3}{2}x+5y+\frac{3}{2}z\right).\end{aligned}$$

Por otro lado, vimos que

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(x,y,z)=\begin{pmatrix} z\\ \dfrac{x-z}{2}\\ y\end{pmatrix},$$

y así podemos hacer el producto de ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ por este vector, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z\\ \dfrac{x-z}{2}\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2z+\dfrac{3}{2}(x-z)-y\\ 2y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3x}{2}-y+\dfrac{z}{2}\\ 2y+z\end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x}{2}-y+\frac{z}{2}\right)\cdot(2,-1)+(2y+z)\cdot(0,2) &= \left(3x-2y+z,-\frac{3x}{2}+y-\frac{z}{2}+4y+2z\right)\\&=\left(3x-2y+z,-\frac{3}{2}x+5y+\frac{3}{2}z\right).\\&=T(x,y,z).\end{aligned}$$

Lo que ocurre al final del ejercicio anterior se debe a un resultado más abstracto, enunciado a continuación, que nos dice cómo obtener las coordenadas de $T(v)$ en la base $\mathcal{B}$, conociendo las coordenadas de v en la base $\mathcal{A}$ y la matriz asociada ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$.

Teorema 6.3

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y con bases

$$\mathcal{A}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}\subseteq V \text{ y } \mathcal{B}=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}\subseteq W.$$

Para toda transformación lineal $T\colon V\to W$, se cumple la siguiente igualdad:

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v))={}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}\cdot\operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v).$$

6.7. Operaciones entre transformaciones lineales vs. operaciones entre matrices

Sabemos que dadas dos transformaciones lineales $T,S\colon V\to W$, podemos formar una nueva transformación lineal $T+S\colon V\to W$. Si se nos dan bases $\mathcal{A}$ de V y $\mathcal{B}$ de W, sabemos que podemos hallar la matriz asociada a $T+S$ en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Lo interesante aquí es que, en lugar de calcular ${}_{\mathcal{B}}((T+S))_{\mathcal{A}}$ con el procedimiento mostrado anteriormente, podemos hallar esta matriz simplemente sumando las matrices ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ y ${}_{\mathcal{B}}((S))_{\mathcal{A}}$. Algo similar para con la transformación lineal $\alpha \cdot T$, para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, y la matriz ${}_{\mathcal{B}}((\alpha \cdot T))_{\mathcal{A}}$. De manera más específica, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.4

Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases $\mathcal{A} \subseteq V$ y $\mathcal{B} \subseteq W$. Dadas dos transformaciones lineales $T, S\colon V \to W$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, las matrices asociadas a las transformaciones

$$\begin{aligned} T + S\colon V &\to W, \\ v &\mapsto (T+S)(v) := T(v) + S(v), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha \cdot T\colon V &\to W, \\ v &\mapsto (\alpha \cdot T)(v) := \alpha \cdot T(v), \end{aligned}$$

vienen dadas por:

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}((T+S))_{\mathcal{A}} &= {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} + {}_{\mathcal{B}}((S))_{\mathcal{A}}, \\ {}_{\mathcal{B}}((\alpha \cdot T))_{\mathcal{A}} &= \alpha \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

donde las operaciones que salen a la derecha son la suma de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar.

Ahora consideremos la situación en la que tenemos dos transformaciones lineales $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to U$ donde V, W y U tienen bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente. Podemos hallar la matriz asociada en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ de la composición $S \circ T\colon V \to U$, mediante el producto de las matrices asociadas de T y S. Específicamente, tenemos lo siguiente.

Teorema 6.5

Sean V, W y U $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases $\mathcal{A} \subseteq V$, $\mathcal{B} \subseteq W$ y $\mathcal{C} \subseteq U$. Si $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to U$ son transformaciones lineales con matrices asociadas ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ y ${}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}}$, entonces la matriz asociada a $S \circ T\colon V \to U$ en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ viene dada por:

$${}_{\mathcal{C}}((S \circ T))_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}},$$

donde el producto que aparece a la derecha es el producto usual de matrices.

Corolario 6.1

Sea $T\colon V \to W$ un isomorfismo, $\mathcal{A}$ una base de V y $\mathcal{B}$ una base de W. Entonces, ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ es invertible, y la matriz asociada a la transformación lineal inversa $T^{-1}\colon W \to V$ en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ viene dada por

$${}_{\mathcal{A}}((T^{-1}))_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}})^{-1}.$$

6.8. Cambio de bases

En la sección anterior estudiamos cómo hallar las coordenadas de $T(v)$ en una base teniendo la matriz asociada a T y las coordenadas de v relativas a una base del dominio de T. Ahora nos centraremos en la situación más simple en donde sólo trabajaremos con un espacio vectorial V, pero para el cual consideraremos dos bases diferentes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. El problema aquí será cómo conocer las coordenadas de $v \in V$ respecto a $\mathcal{A}'$ si conocemos las coordenadas de v respecto a $\mathcal{A}$. Veremos que esto será un caso particular del Teorema 6.6 haciendo $T = \mathrm{id}_V$ (la identidad sobre V).

Sean entonces $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{A}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ dos bases del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Tomamos $v_j \in \mathcal{A}$, para el cual existen $a_{ij} \in \mathbb{K}$, con $1 \leqslant i \leqslant n$, tales que

$$v_j = a_{1j}v'_1 + a_{2j}v'_2 + \cdots + a_{nj}v'_n.$$

Es decir,

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Notamos además que si consideramos la tranformación lineal identidad $V \to V$, donde tomamos $\mathcal{A}$ como base del dominio y $\mathcal{A}'$ como base del codominio (es decir, $\mathrm{id}_V : (V, \mathcal{A}) \to (V, \mathcal{A}')$), entonces

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(v_j) = \mathrm{cood}_{\mathcal{A}'}(I(v_i)),$$

por lo que al colocar (6.2) como columnas de una matriz, nos da la matriz ${}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}}$. Esta matriz asociada a I en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ tiene un nombre particular, que presentamos a continuación.

Definición 6.5

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V con bases

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \text{ y } \mathcal{A}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\},$$

a la matriz

$${}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(v_1) & \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(v_2) & \cdots & \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(v_n) \end{pmatrix}$$

se le conoce como la **matriz de cambio** de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{A}'$.

Lo siguiente es una consecuencia del Teorema 6.6, y nos dice cómo obtener las coordenadas de cualquier vector $v \in V$ respecto a la base $\mathcal{A}'$, si conocemos sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{A}$.

Corolario 6.2

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos bases de un espacio vectorial V. Entonces, para cualquier $v \in V$, se tiene

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(v) = {}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(v) \text{ y } \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(v) = \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}'} \cdot \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(v).$$

Ejemplo 50.

1. Consideremos a $\mathbb{R}^3$ con la base canónica $\mathcal{A} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, y el conjunto

$$\mathcal{A}' = \{(1,0,2), (3,-1,0), (0,1,-2)\}.$$

Verificar que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y hallar las coordenadas de cualquier $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{A}'$.

Para verificar que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$, basta colocar los elementos de $\mathcal{A}'$ como columnas de una matriz, calcularle su determinante y ver que es diferente de 0.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= ((-1)(-2) - 1 \cdot 0) - 3 \cdot (0 \cdot (-2) - 1 \cdot 2) \\ &= 2 - 3(-2) = 2 + 6 = 8 \neq 0.\end{aligned}$$

Sabemos que las coordenadas de $v = (x, y, z)$ respecto a $\mathcal{A}$ son x, y y z (en este orden). Entonces, para conocer las coordenadas de v respecto a $\mathcal{A}'$, podemos calcularlas directamente, o usar la expresión $\operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v)$.

$$(1,0,0) = \frac{1}{4} \cdot (1,0,2) + \frac{1}{4} \cdot (3,-1,0) + \frac{1}{4} \cdot (0,1,-2), \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

$$(0,1,0) = \frac{3}{4} \cdot (1,0,2) - \frac{1}{4} \cdot (3,-1,0) + \frac{3}{4} \cdot (0,1,-2), \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

$$(0,0,1) = \frac{3}{8} \cdot (1,0,2) - \frac{1}{8} \cdot (3,-1,0) - \frac{1}{8} \cdot (0,1,-2), \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(0,0,1) = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}.$$

Así:

$$_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/4 & -1/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(x,y,z) &= {}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(x,y,z) \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2x + 6y + 3z \\ 2x - 2y - z \\ 2x + 6y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{4} + \frac{3y}{4} + \frac{3z}{8} \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{4} - \frac{z}{8} \\ \frac{x}{4} + \frac{3y}{4} - \frac{z}{8} \end{pmatrix}, \\ (x,y,z) &= \left(\frac{x}{4} + \frac{3y}{4} + \frac{3z}{8}\right)(1,0,2) + \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{4} - \frac{z}{8}\right)(3,-1,0) + \left(\frac{x}{4} + \frac{3y}{4} - \frac{z}{8}\right)(0,1,-2)\end{aligned}$$

2. Consideremos el espacio $\mathcal{P}_2$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y grado menor o igual a 2. Sea $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{A}' = \{4x - 1, 2x^2 - x, 3x^2 + 3\}$. Verifique que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathcal{P}_2$, y calcule las coordenadas de cualquier $p \in \mathcal{P}_2$ en la base $\mathcal{A}'$.

Para verificar que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathcal{P}_2$, calculamos las coordenadas de los elementos de $\mathcal{A}'$ respecto a $\mathcal{A}$, con los vectores columna resultantes formamos una matriz, y verificamos que su determinante es diferente de cero.

$$4x - 1 = -1 \cdot 1 + 4 \cdot x + 0 \cdot x^2, \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(4x-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2x^2 - x = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot x + 2 \cdot x^2, \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(2x^2-x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$3x^2 + 3 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2, \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(4x-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -1(-3) + 3 \cdot 12 = 39 \neq 0.$$

Entonces, $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathcal{P}_2$.

Notamos que

$$_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

por lo que para obtener $_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}}$, simplemente calculamos la inversa de la matriz anterior.

$$_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} = (_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, dado $p(x) = a + bx + cx^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(p) = {}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(p) &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3a}{27} + \frac{6b}{27} + \frac{3c}{27} \\ -\frac{12a}{27} - \frac{3b}{27} + \frac{12c}{27} \\ \frac{8a}{27} + \frac{2b}{27} + \frac{c}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{9} + \frac{2b}{9} + \frac{c}{9} \\ -\frac{4a}{9} - \frac{b}{9} + \frac{4c}{9} \\ \frac{8a}{27} + \frac{2b}{27} + \frac{c}{27} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{1}{9}(a + 2b + c)(4x - 1) + \frac{1}{9}(-4a - b + 4c)(2x^2 - x) + \frac{1}{27}(8a + 2b + c)(3x^2 + 3).$$

Ahora que sabemos cómo cambiar las coordenadas de un vector entre dos bases, estudiaremos cómo cambia la matriz asociada a una transformación lineal $T\colon V \to W$ cuando se tienen dos bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ de V, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de W.

Teorema 6.6

Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos bases de V, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de W. Entonces, si conocemos la matriz ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ de T en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, podemos conocer la matriz ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ de T en bases $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ mediante la siguiente expresión:

$$ {}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}, $$

donde $\mathrm{id}_V : V \to V$ y $\mathrm{id}_W : W \to W$ son las transformaciones lineales identidad sobre V y W, respectivamente.

Cerramos esta sección presentando un par de propiedades de la matriz asociada a la transformación identidad. La primera de ellas es inmediata y la segunda (la cual usamos en el ejemplo anterior) es consecuencia del Corolario 6.7.

Proposición 6.8

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, con bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, y sea $\mathrm{id}_V : V \to V$ la transformación lineal identidad sobre V. Entonces, las siguientes condiciones se cumplen:

1. ${}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}} = I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de orden n.
2. ${}_{\mathcal{A}'}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}}$ es invertible, y $({}_{\mathcal{A}'}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}})^{-1} = {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$.

6.9. Matrices semejantes

En el Teorema 6.8 vimos la igualdad ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$. Hablando de manera muy informal, podríamos decir que las matrices ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ se parecen, pues ${}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}}$ son matrices invertibles asociadas a operadores identidad. De hecho, ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ comparten algunos de sus valores importantes, como lo son su determinante y traza (en el sentido de que estos coinciden). Al parecer, el determinate y la traza son un tipo de invariantes asociados a matrices de la forma ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$. De hecho, esto último sigue siendo cierto cuando se define determinada relación entre matrices cuadradas (no necesariamente asociadas a una transformación lineal). Dicha relación se conoce en álgebra lineal como *semejanza*.

Definición 6.6

Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ dos matrices cuadradas de orden n. Diremos que A y B son **semejantes** si existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$ B = P^{-1} \cdot A \cdot P. $$

Ejemplo 51.

1. Aunque sirvió para motivar el concepto de semejanza, ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ no necesariamente son semejantes, pues aunque ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$, la matriz ${}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}}$ no tiene por qué ser la inversa de ${}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$.

Pero supongamos que tenemos un operador $T\colon V \to V$ donde en V consideramos dos bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. Entonces,
$$_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'} \cdot {}_{\mathcal{A}'}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'},$$
donde $_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'} = ({}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'})^{-1}$, por lo que $_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}'}$ y $_{\mathcal{A}'}((T))_{\mathcal{A}}$ sí son semejantes.

2. Las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
son semejantes, ya que $B = P^{-1}AP$, donde
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
es invertible y
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sea θ un número real. Entonces, las matrices
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$
son semejantes, donde $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)$.

El concepto de semejanza entre matrices está estrechamente relacionado con el de representación matricial de operadores lineales. En efecto, ya vimos en la parte 1. del ejemplo anterior que si $T\colon V \to V$ es un operador lineal sobre V y si se consideran dos bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ de V, entonces $_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}'}$ y $_{\mathcal{A}'}((T))_{\mathcal{A}}$ son semejantes.

Ahora, si tenemos dos matrices semejantes A y B de orden n y con coeficientes en $\mathbb{K}$, podemos escribir tanto A como B como matrices asociadas a un mismo operador lineal. En efecto, dicho operador podemos definirlo como
$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto A \cdot x \end{aligned}$$
donde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Es fácil ver que
$$A = {}_{\mathcal{E}}((T))_{\mathcal{E}},$$
donde $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Ahora, como A y B son semejantes, sabemos que existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Dado que la matriz P es invertible, tenemos que el conjunto $\mathcal{B} = \{P \cdot e_1, \dots, P \cdot e_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. Más aún, podemos ver que $P = {}_{\mathcal{E}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{U}}$, por lo cual $P^{-1} = {}_{\mathcal{U}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{E}}$. Por lo tanto, por el Teorema 6.8, tenemos:
$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = {}_{\mathcal{U}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}((T))_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{U}} = {}_{\mathcal{U}}((T))_{\mathcal{U}}.$$

Esto se especifica en el siguiente resultado.

Teorema 6.7

Dadas dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces, A y B son semejantes si, y solamente si, A y B son matrices asociadas a un mismo operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$; es decir, existe un operador lineal $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ tales que $A = {}_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}}$ y $B = {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}}$.

Al principio de esta sección comentamos que tanto la traza como el determinante de matrices son invariantes bajo la relación de semejanza. Para explicar mejor en qué significa esto, supongamos de nuevo que tenemos la situación

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Para cualquier par de matrices cuadradas M y N (del mismo orden), recordamos por propiedades del determinante y de la traza que $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$ y $\operatorname{tr}(M \cdot N) = \operatorname{tr}(N \cdot M)$. Entonces, para el caso que nos compete, tenemos:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = (\det(P))^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\
&= \det(A), \\
\operatorname{tr}(B) &= \operatorname{tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \operatorname{tr}(A \cdot P^{-1} \cdot P) \\
&= \operatorname{tr}(A).
\end{aligned}$$

Resumamos esto en el siguiente resultado.

Teorema 6.8

Sean A y B dos matrices semejantes en $M_n(\mathbb{K})$. Entonces, las siguientes propiedades se cumplen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}(B), \\
\det(A) &= \det(B), \\
\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}(B),
\end{aligned}$$

donde $\operatorname{rg}(A)$ denota el rango de la matriz A (número máximo de filas de A que son linealmente independientes).

Escrito en LaTeX por:
Marco A. Pérez, Ph.D.
Profesor Adjunto Grado 3
Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia"
Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
Oficina 122
mperez@fing.edu.uy