Universidad de la República **20 de julio de 2024**

Facultad de Ingeniería-IMERL

EXAMEN: PROBABILIDAD Y ESTADISTICA (SOLUCIÓN)

Ejercicio 1

Estimamos por momentos. Planteamos $\mathbb{E}(X) = \overline{X}_n$.
$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{2}{b^2}\int_0^b x^2 dx = \frac{2}{3}b = \overline{X}_n$ por lo que $b = \frac{3}{2}\overline{X}_n$ por lo que $\widehat{b}_M = \frac{3}{2}\overline{X}_n$.
La función de verosmilitud es

$$L(b) = f_X(x_1) f_X(x_2) \ldots . f_X(x_n) =$$

$$\begin{cases} \frac{2x_1}{b^2} & \text{si} \quad 0 < x_1 \le b \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} \times \begin{cases} \frac{2x_2}{b^2} & \text{si} \quad 0 < x_2 \le b \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} \times \ldots . \times \begin{cases} \frac{2x_n}{b^2} & \text{si} \quad 0 < x_n \le b \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \frac{2^n x_1 x_2 \ldots x_n}{b^{2n}} & \text{si} \quad 0 < x_1, x_2, \ldots, x_n \le b \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}.$$

Como la expresión $\frac{2^n x_1 x_2 \ldots x_n}{b^{2n}}$ es positiva y decreciente como función de b y es válida cuando $b > x_1, x_2, \ldots, x_n$ es decir cuando $b \ge \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se tiene que $L(b)$ se maximiza en $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ por lo que el estimador máximo verosímil de b es $\widehat{b}_{MV} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Entonces la respuesta correcta es (A).

Ejercicio 2

Sabemos que $\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{3}{a^3}\int_0^a x^3 dx = \frac{3a}{4}$. Entonces $\mathbb{E}(\widehat{a}) = \mathbb{E}\left(\frac{4\overline{X}_n}{3}\right) = \frac{4}{3}\frac{3}{4}a = a$ lo que prueba que $\widehat{a}$ es insesgado.
$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{3}{a^3}\int_0^a x^4 dx = \frac{3a^2}{5}$.
$\text{ECM}(\widehat{a}) \overset{\text{sesgo}=0}{=} V(\widehat{a}) = V\left(\frac{4\overline{X}_n}{3}\right) = \frac{16}{9}V\left(\overline{X}_n\right) = \frac{16\sigma^2}{9n}$ siendo $\sigma^2 = V(X)$.
$\sigma^2 = V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \frac{9}{16}a^2 = \frac{3}{5}a^2 - \frac{16}{9}a^2 = \frac{3}{80}a^2$ entonces

$\text{ECM}(\widehat{a}) = \frac{a^2}{15n}$ por lo que la opción correcta es (C).

Ejercicio 3

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 \frac{2}{3}(y+1)e^{-x}dy & \text{si} \quad x > 0 \\ & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{2}{3}(y+1)e^{-x}dx & \text{si} \quad x > 0 \\ & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3}(y+1) & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}.$$

Entonces $f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} \times \begin{cases} \frac{2}{3}(y+1) & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} =$

$\begin{cases} \frac{2}{3}(y+1)\,e^{-x} & \text{si} \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} = f_{X,Y}(x,y)$ por lo que X e Y son independientes. Por otro lado

$$P\left(Y<X\right)=\int_0^1\left(\int_y^{+\infty}\frac{2}{3}\left(y+1\right)e^{-x}dx\right)dy=$$

$\frac{2}{3}\int_0^1\left(y+1\right)e^{-y}dy=\frac{4}{3}-2e^{-1}=0.597\,57$ por lo que la respuesta correcta es (B).

Ejercicio 4

La región crítica para esta prueba es de la forma

$$RC=\left\{\overline{X}_n\geq\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha\right\}=\left\{\overline{X}_n\geq 9+\frac{1.5}{\sqrt{20}}\times 1.645\right\}=\left\{\overline{X}_n\geq 9.552\right\}$$

Bajo H_1 cierto, se tiene que $\overline{X}_n\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)=N\left(10,\frac{1.5^2}{20}\right)=N(10,0.1125)$, entonces

$$\beta=P_{H_1}\left(RC^c\right)=P_{H_1}\left(\overline{X}_n<9.552\right)=\phi\left(\frac{10-9.552}{\sqrt{0.1125}}\right)=\phi\left(1.33\right)=0.908$$

por lo que la opción correcta es (B).

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1

1. Sabemos que si definimos X = cantidad de personas que pasan por la caja en una hora, entonces $X\sim$Poisson$(\lambda=6)$ por lo que

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-6x}6^x}{x!}\text{ para todo }x=0,1,2,3,....$$

   entonces la probabilidad de que la caja funcione en régimen es

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=0.938.$$

2. Definimos ahora X = cantidad de cajas que no operen a régimen entre las 15, entonces $X\sim$ Bin$(n=15,p=0.062)$ por lo que

$$P(X=x)=\binom{15}{x}0.062^x0.938^{15-x}\text{ para todo }x=0,1,2,...,15.$$

   Entonces la probabilidad de que a lo sumo una caja no opere a régimen es

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=0.762.$$

Ejercicio 2

1. Definimos $X =$ cantidad de respuestas correctas entre las 5 de verdadero y falso, $Y =$cantidad de respuestas correctas entre las 5 que tienen 4 opciones. Entonces $X \sim$Bin$(n = 5, p = 1/2)$, $Y \sim$Bin$(n = 5, p = 1/4)$ además X e Y son independientes.

   La probabilidad de que exactamente una de las 10 preguntas sea contestada correctamente es

$$P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) \overset{\text{indep}}{=} P(X = 1)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = 1) =$$

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4} = 0.0494.$$

2. Si definimos $A = \{X = 1, Y = 0\} \cup \{X = 0, Y = 1\}$ entonces queremos calcular

$$P(X = 1, Y = 0/A) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(A)} = \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5}{0.0494} = \frac{0.0371}{0.0494} = 0.751.$$

Ejercicio 3

1. Si le llamamos C al suceso "el individuo es consumidor"

$$P(\text{Contestan SI}) = P(R/C)P(C) + P(A/C^c)P(C^c) = \frac{2}{3}q + \frac{1}{3}(1-q) = \frac{q+1}{3}.$$

2. Por la ley de los grandes números sabemos que podemos estimar consistentemente $P(\text{Contestan SI})$ mediante el porcentaje de quienes contestaron que SI en la muestra, es decir que $\frac{263}{600} = 0.438$ es una estimación de $\frac{q+1}{3}$ entonces despejando q tenemos que $\hat{q} = 0.438 \times 3 - 1 = 0.314$ es una estimación del porcentaje de consumidores en la población.

Ejercicio 4

1. La probabilidad pedida es

$$P(X > 400, Y > 400) = P(X > 400)P(Y > 400) = e^{-0.003\times 400}e^{-0.004\times 400} = 0.061.$$

2. Que ocurra el suceso $\{T \leq 400\}$ equivale a decir que ambas componentes tienen un tiempo de vida superior a 400, o sea que

$$P(T \leq 400) = 1 - P(X > 400, Y > 400) = 0.939.$$