Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

EXAMEN 17 DE JULIO DE 2024.

N° de examen	Apellido y Nombre	Cédula

El examen dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [25 puntos] Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ de clase C^∞, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, se desea calcular la derivada segunda $f''(a)$ en un punto $a \in I$ usando la fórmula

$$\delta_2 f(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}. \tag{1}$$

a) Describir qué son el error de truncamiento y de redondeo asociados a esta aproximación.

b) Usar un desarrollo de Taylor para probar que el error de truncamiento es $\mathcal{O}(h^2)$.

c) Acotar el error de redondeo. Se puede asumir que $a, a+h, a-h$, y f tienen representación exacta en punto flotante, y que el cociente se puede calcular en forma exacta.

d) Supongamos que $f(x) = e^x$ y $a = 1$. Si se implementa la aproximación (1) en aritmética de punto flotante con precisión doble ($\epsilon_M = 2^{-52} \approx 2{,}2 \times 10^{-16}$), estimar el valor de h óptimo.

Ejercicio 2. [25 puntos]

a) Consideremos un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$. Escribir las iteraciones asociadas a los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel.

b) Dar una condición necesaria y suficiente para la convergencia de estos métodos.

c) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Estudiar la convergencia del método de Jacobi para el sistema $Ax = b$.

d) Para el sistema de la parte anterior, se considera un método de Jacobi sobrerrelajado,

$$x^{k+1} = \omega x_J^{k+1} + (1-\omega)x^k.$$

Se utiliza este método con $\omega = 3/2$. Estudiar la convergencia del método.

Ejercicio 3. [25 puntos] Se quiere interpolar la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$ usando $n + 1$ nodos equiespaciados en dicho intervalo,

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Se consideran las opciones

- interpolación polinomial de grado lo más alto posible,
- interpolación polinomial lineal a trozos.

a) Acotar el error de interpolación para ambas.

b) Se quiere interpolar f con una tolerancia de error de 10^{-2}. Estimar cuántos puntos son necesarios con una y otra estrategia.

c) Se quiere programar una interpolación polinomial de grado alto con $n + 1 = 2^m + 1$ puntos como arriba, e ir aumentando el valor de $m = 0, 1, \ldots$. Se consideran las opciones de escribir el polinomio interpolante en las formas de Vandermonde, de Lagrange, o de Newton. Justificar cuál de ellas permite realizar esta tarea de forma más estable y eficiente.

Para este ejercicio, puede ser útil la *fórmula de error de interpolación polinomial:* si f es de clase C^{n+1} en $[a, b]$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ están en el intervalo $[a, b]$, y p_n es el polinomio interpolante por $\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}$, entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\gamma_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!}\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Ejercicio 4. [25 puntos] Consideremos los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0\ldots,3}$ dados por $(0, 1)$, $(\pi/2, 2)$, $(\pi, 1)$, $(3\pi/2, 1)$. Queremos ajustar a dichos puntos con una función de la forma

$$y \approx f(x) = a\cos(x) + b\,\text{sen}(x) + c\cos(4x),$$

en el sentido de los mínimos cuadrados.

a) ¿Cuál es la matriz de diseño del problema?

b) Escribir (pero *no resolver*) las ecuaciones normales asociadas al problema. ¿Están bien condicionadas?

c) Si se quiere resolver el problema de mínimos cuadrados mediante un método de ortogonalización usando reflexiones de Householder, ¿cuál es la primer transformación que se debe tomar? ¿Cuántas reflexiones se deben hacer?