Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Matemática Discreta 1

Solución Segundo parcial - 12 de julio de 2024

Respuestas Verdadero o Falso: rellenar con **V** o **F**					
VF1	VF2	VF3	VF4	VF5	VF6
F	F	F	V	V	F

Correcta: 3 puntos. Incorrecta: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

Respuestas múltiple opción: rellenar con **A**, **B**, **C** o **D**					
MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
B	D	A	C	B	B

Correcta: 7 puntos. Incorrecta: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

Verdadero o Falso

1. Existen exactamente dos grafos no isomorfos con siete vértices tales que dos vértices son de grado 3, dos vértices son de grado 4 y tres vértices son de grado 5. **FALSO**.

Solución:
No existe ningún grafo en esas condiciones porque la suma de los grados de los vértices de un grafo dado es siempre par a causa de la ecuación:

$$\text{si } \; G = (V, E), \text{ entonces } \sum_{v \in V} gr(v) = 2 \cdot \#E.$$

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y sin lazos. Se cumple que G es un árbol si y solo si $\#V = \#E + 1$. **FALSO**.

Solución:
Si $G = (V, E)$ es un árbol entonces es cierto que $\#V = \#E + 1$, pero el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, si $G = P_4 \mathbin{\dot\cup} C_3$, o sea la unión disjunta de un camino con 4 vértices y un ciclo de 3 vértices, tendremos que: $\#V = 7$, $\#E = 6$, con lo cual se verifica la ecuación, pero G no es árbol.

3. Sea (A, R) una relación de orden con A finito, tal que existe un único elemento maximal y un único elemento minimal, entonces (A, R) es un orden total. **FALSO**.

Solución:
Consideramos $A = \{2, 4, 6, 12\}$ y la relación de orden $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ si x divide a y, con $x, y \in A$. Entonces tenemos que A es finito, y R es de orden. Además 2 es el único elemento minimal, y 12 es el único elemento maximal. Sin embargo (A, R) no es un orden total porque 4 y 6 no están relacionados.

4. Sea B un conjunto de n elementos, con $1 < n < \infty$. La cantidad de relaciones de orden que se pueden definir en B es mayor a la cantidad de relaciones de equivalencia que se pueden definir en B. **VERDADERO**.

Solución:
Este ejercicio está en el Práctico 11 (Ej. 13). La idea central es que para cada relación de equivalencia que no sea trivial (o sea que alguna clase de equivalencia tenga más de un punto), en cada clase de equivalencia que tenga más de un punto, se pueden definir varias relaciones de orden diferentes.

5. La función generatriz asociada a la sucesión $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$ es $\dfrac{x}{\left(1 - x^2\right)^2}$. **VERDADERO**.

Solución:
Sabemos que $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i$. Luego $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot z^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot z^i$. Ahora, haciendo cambio de variable $z = x^2$ (o más formalmente componiendo con la función x^2), tenemos que $\frac{1}{(1-x^2)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot (x^2)^i$. Finalmente si multiplicamos por x obtenemos: $\frac{x}{(1-x^2)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot x^{2i+1}$ cuya sucesión asociada es justamente $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$.

6. Se consideran las ecuaciones en recurrencias

$$\text{I: } a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$$

y

$$\text{II: } a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n^2 2^n.$$

Entonces una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ es solución de I si y sólo si es solución de II. **FALSO**.

Solución:
Si $(a_n)_{n\geq 0}$ es solución de I y II al mismo tiempo, entonces verifica ambas ecuaciones con lo cual:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n \;\text{ y }\; a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n^2 2^n.$$

Por lo tanto sería $2^n = n^2 2^n$, y llegaríamos a que $n^2 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, absurdo.

Múltiple Opción

1. Consideremos la siguiente recurrencia:

$$d_n = 4d_{n-1} - 4d_{n-2} + 2, \text{ con } d_0 = 2, \; d_1 = -2.$$

El valor de d_{32} es:

A) 2^{38} **B**) $\boxed{-2^{38} + 2}$ **C**) $2^{38} + 2$ **D**) $-2^{38} - 2$

Solución:
Primero buscamos una solución particular de la forma $\gamma \cdot 1^n$, y obtenemos que $\gamma = 2$ es solución. Luego buscamos solución de la homogénea y observamos que el polinomio asociado a la ecuación de recuerrencia homogénea es: $(x-2)^2 = 0$. Raíz doble 2. Por lo tanto la solución general a la ecuación de recurrencia es de la forma:

$$d_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot n \cdot 2^n + 2.$$

Usando las condiciones iniciales $d_0 = 2, \; d_1 = -2$, tenemos que $\alpha = 0$ y $\beta = -2$. Luego

$$d_n = -2 \cdot n \cdot 2^n + 2.$$

Así, $d_{32} = -2 \cdot 32 \cdot 2^{32} + 2 = -2 \cdot 2^5 \cdot 2^{32} + 2 = -2^6 \cdot 2^{32} + 2 = -2^{38} + 2$.

---

2. La cantidad de relaciones de equivalencia en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tales que $\#[2] = \#[3]$ y $\#[5] = 2$ es:

A) 18 **B**) 27 **C**) 30 **D**) $\boxed{39}$

Solución:
Como las clases de 2 y 3 tienen el mismo cardinal, ambas pueden ser la misma clase ($2 \; R \; 3$) o bien los elementos 2 y 3 pueden estar no relacionados.

- Caso $[2] = [3]$:
  O sea, 2 y 3 están en la misma clase de equivalencia: $2 \; R \; 3$. Como $\#[5] = 2$ entonces 1, 4 o 6 (solo uno de ellos) está en la misma clase que 5 (tres opciones). Los otros dos elementos, llamésmole x, y, pueden estar:
  - ambos en la clase de 2, o sea $\{x, y\} \subset [2]$;
  - uno en la clase de 2 y el otro no (dos casos);
  - los dos fuera de la clase de 2, y aquí también hay dos casos pues pueden estar en la misma clase ($x \; R \; y$) o bien en clases diferentes si x e y no están relacionados.

  En total tenemos $3 \cdot 5 = 15 casos$.

- Caso $[2] \neq [3]$:
  Tenemos entonces que $\#[5] = 2$ y que $\#[2] = n = \#[3]$ pero $[2] \neq [3]$.

$n = 1$: En este caso 2 y 3 "están solos", o sea $[2] = \{2\}$ y $[3] = \{3\}$, en cuanto un elemento entre 1,4 y 6 acompaña a 5 en su clase (tres posibilidades). Además los dos elementos restantes, llamésmole x e y, pueden estar relacionados o no relacionados. Total: 6 casos posibles.

$n = 2$: Aquí hay tres posibilidades:

- $[2] = [5]$: En este caso tenemos que las clases son

$$\{2,5\},\ \{3,z\},\ \{x,y\};$$

o bien:

$$\{2,5\},\ \{3,z\}\ \{x\},\ \{y\}.$$

Total: 6 casos, pues z tiene tres posibilidades.

- $[3] = [5]$: Este caso es análogo al anterior. Tenemos que las clases son

$$\{3,5\},\ \{2,z\},\ \{x,y\};$$

o bien:

$$\{3,5\},\ \{2,z\},\ \{x\},\ \{y\}.$$

Total: 6 casos, pues z tiene tres posibilidades.

- $[2] \neq [5] \neq [3]$: En este caso tenemos que las clases son:

$$\{2,x\},\ \{3,y\},\ \{5,z\},$$

variando x, y, z en el conjunto $\{1,4,6\}$. Total: 6 casos.

Resultado final: 39 casos posibles.

---

3. Se define la relación de orden R sobre el conjunto $A = \{2,3,4,\dots,1998,1999,2000\}$ tal que xRy si y solo si x divide a y. ¿Cuántos elementos maximales existen en el orden parcial (A,R)?

A) $\boxed{1000}$ **B**) 500 **C**) 1999 **D**) 1001

Solución:
Basta observar que $n\ R\ 2n$ para todo $2 \leq n \leq 1000$, con lo cual los números entre 2 y 1000 no pueden ser maximales. A la vez, para todo $1001 \leq m \leq 2000$, m es maximal, pues cualquier múltiplo (estrictamente mayor) de m, sería mayor o igual a 2002.

---

4. ¿Cuántas hojas tiene un árbol con 5 vértices de grado 2, 2 vértices de grado 3, 5 vértices de grado 4, y 4 vértices de grado 5?

A) 16 **B**) 20 **C**) $\boxed{26}$ **D**) 30

Solución:
Sabemos que en todo grafo vale

$$\text{si}\quad G = (V,E),\ \text{entonces} \sum_{v \in V} gr(v) = 2 \cdot \#E.$$

Además, si el grafo es árbol vale que $\#V - 1 = \#E$. O sea que valdrá:

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2 \cdot (\#V - 1).$$

En este caso el número de vértices es: $5+2+5+4+n$, siendo n el número de hojas (vértices de grado 1), con lo cual tenemos:

$$10 + 6 + 20 + 20 + n = 2 \cdot (15 + n).$$

De ahí deducimos que $n = 26$.

---

5. Consideremos un conjunto parcialmente ordenado $(P,\leq)$ con 121 elementos y que verifica que la mayor cadena tiene 10 elementos. La altura de un elemento $x \in P$, denotada por $h(x)$, se define como el mayor cardinal de una cadena $S \subseteq P$ que verifica $\max(S) = x$. Considere las siguientes propiedades:

P1) $h(x) = 1$ para todo elemento minimal $x \in P$.

P2) $h(x) = 10$ para todo elemento maximal $x \in P$.

P3) Existe una anticadena con 13 elementos.

A) $(P,\leq)$ verifica las propiedades P1 y P2, pero no necesariamente la propiedad P3.

B) $\boxed{(P,\leq) \text{ verifica las propiedades P1 y P3, pero no necesariamente la propiedad P2.}}$

C) $(P,\leq)$ verifica las propiedades P2 y P3, pero no necesariamente la propiedad P1.

D) $(P,\leq)$ no verifica ninguna de las propiedades P1, P2 y P3.

Recordar que el cardinal de la cadena $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ es n.

Solución:
P1 es verdadera pues si x es minimal, no existe $y \neq x \in P$ tal que $y \leq x$. Luego las cadenas que tienen a x como elemento máximo solo pueden tener un elemento.

P3 es verdadera:

- *Argumento 1*: es verdadera por el (corolario del) Teorema de Dilworth, pues hay 121 elementos y la mayor cadena tiene 10 elementos (observar que $121 = 12 \cdot 10 + 1$).
- *Argumento 2*: es verdadera pues su diagrama de Hasse tiene 10 niveles y como hay 121 elementos debe haber algún nivel con más de 12 elementos (palomar). Recordar además que elementos en un mismo nivel del diagrama de Hasse siempre forman una anticadena.

P2 es falsa, porque no tiene porqué sere verdad que todos los elementos maximales tengan cadenas de largo 10 que lo tengan como elemento máximo de la misma. Se puede ser maximal y no participar de una cadena de largo máximo.

---

6. El coeficiente de x^{15} de $\dfrac{(1-x^3)^5}{(1-x^5)^3}$ es:

A) 11 **B)** $\boxed{9}$ **C)** 10 **D)** 15

Solución:
Por un lado tenemos el desarrollo de:

$$(1-x^3)^5 = \sum_{i=0}^{i=5} C_i^5 \cdot (-1)^i \cdot (x^3)^i = C_0^5 \cdot x^0 - C_1^5 \cdot x^3 + C_2^5 \cdot x^6 - C_3^5 \cdot x^9 + C_4^5 \cdot x^{12} - C_5^5 \cdot x^{15}.$$

Por otro lado tenemos el desarrollo de:

$$(1-x^5)^{-3} = \sum_{i=0}^{\infty} CR_i^3 \cdot (x^5)^i = CR_0^3 \cdot x^0 + CR_1^3 \cdot x^5 + CR_2^3 \cdot x^{10} + CR_3^3 \cdot x^{15} + \ldots.$$

Recordar que estamos buscando el coeficiente de x^{15} en el desarrollo de la función. Cuando multiplicamos ambos desarrollos obtenemos solo dos términos en x^{15}:

$$(C_0^5 \cdot x^0) \cdot (CR_3^3 \cdot x^{15}) \text{ y } (-C_3^5 \cdot x^{15}) \cdot (CR_0^3 \cdot x^0).$$

Por lo tanto el coeficiente de x^{15} es $10 - 1 = 9$.