Cálculo diferencial e integral en una variable

1er semestre de 2024

Segundo parcial

9 de julio de 2024 | 3

Nº de lista	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Respuestas a las preguntas de MÚLTIPLE OPCIÓN									
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Llenar cada casilla con la respuesta **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F** según corresponda.

Correctas: 6 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

Para cada ejercicio, hay una y sólo una opción que es correcta.

La duración del parcial es de 3 horas y media y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Ejercicio 1

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2-x+2})$. Indicar el valor de $f'(0)$.

(A) $f'(0) = \cos(e^2)e^2$

(B) $f'(0) = \operatorname{sen}(e^2)$

(C) $f'(0) = -\operatorname{sen}(e^2)e^2$

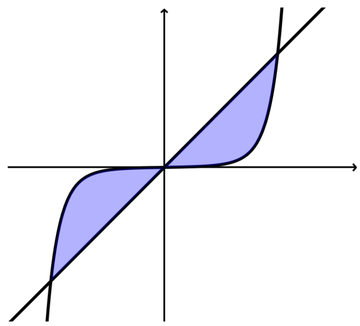
(D) $f'(0) = -\cos(e^2)$

(E) $f'(0) = \cos(e^2)$

(F) $f'(0) = -\cos(e^2)e^2$

Ejercicio 2

Se considera la región encerrada entre los gráficos de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = xe^{x^2-4}$, que aparece sombreada en la figura.



El área de dicha región es

(A) $2 + 2e^{-4}$

(B) $4 - 8e^{-4}$

(C) $3 + e^{-4}$

(D) $5 - e^{-4}$

(E) $\frac{1}{2}(3 + e^{-4})$

(F) $\frac{1}{2}(5 - e^{-4})$

Ejercicio 3

Indicar el valor de

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\, dx.$$

(A) $2 - \pi$

(B) $-(2 + \pi)$

(C) $-\frac{\pi}{2}$

(D) $-\pi$

(E) 2π

(F) $\pi - 2$

Ejercicio 4

Sea $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f_a(x) = x^3 - ax^2 + 1$.

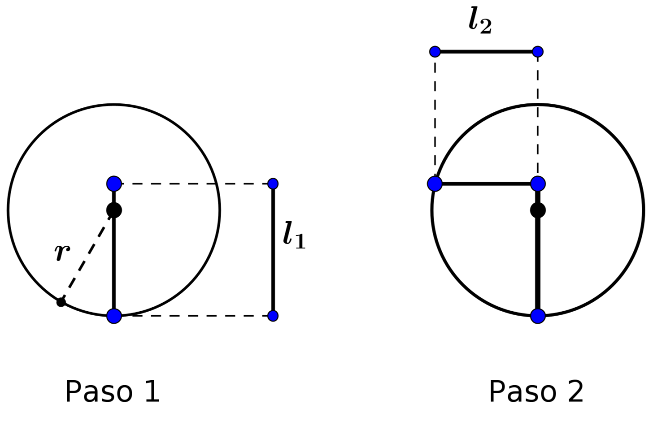
Indicar para cuál de los siguientes valores del parámetro a la recta tangente a la gráfica de f_a en el punto $(a, f_a(a))$ pasa por el punto $(0, 0)$.

(A) $a = -2$	(C) $a = 1$	(E) $a = 3$
(B) $a = -3$	(D) $a = 2$	(F) $a = -1$

Ejercicio 5

En el conocido videojuego *SlimeCalculus*, una babosa se mueve dentro de un círculo de radio r. La babosa aparece en un punto de la circunferencia y se mueve describiendo un segmento que pasa por el centro del círculo, es decir, que está contenido en un diámetro. En un momento, la babosa gira 90°, y su movimiento describe un segundo segmento perpendicular al primero, hasta que sale del círculo.

Si se desplaza una distancia l_1 antes de girar y una distancia l_2 después de girar, ¿cuál es la longitud máxima que puede recorrer la babosa? Es decir, ¿cuál es el máximo valor posible de $l_1 + l_2$?



(A) $\left(1+\sqrt{2}\right) r$	(C) $(1+\sqrt{5})r$	(E) $3r$
(B) $(\frac{1}{2}+\sqrt{3})r$	(D) $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) r$	(F) $(1+\frac{3}{\sqrt{5}})r$

Ejercicio 6

Consideremos la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_0^x (t^2 + 1)(t + 1)(t - 2)(t - 3)^2 \, dt.$$

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) F tiene exactamente cinco puntos críticos. Tres son máximos relativos y dos son mínimos relativos.

(B) F tiene exactamente cinco puntos críticos. Tres son mínimos relativos y dos son máximos relativos.

(C) F tiene exactamente tres puntos críticos. Dos son máximos relativos y uno es mínimo relativo.

(D) F tiene exactamente tres puntos críticos. Uno es máximo relativo y dos son mínimos relativos.

(E) F tiene exactamente tres puntos críticos. Uno es máximo relativo, uno es mínimo relativo y el otro no es ni máximo ni mínimo.

(F) F tiene exactamente cinco puntos críticos. Uno es máximo relativo, uno es mínimo relativo y hay tres que no son ni máximos ni mínimos.

Se recuerda que x es un *punto crítico* de F si $F'(x) = 0$.

Ejercicio 7

Consideremos una función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ que es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$ tal que $f(0) = 3$, $f(2) = 1$. Indicar la afirmación que es necesariamente verdadera:

(A) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = -2$.

(B) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

(C) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = -1$.

(D) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

(E) f es estrictamente decreciente.

(F) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 1$.

Ejercicio 8

Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2 + x) - x}.$$

(A) 2

(B) $+\infty$

(C) 0

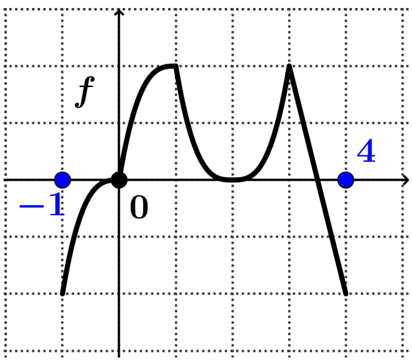
(D) $\frac{1}{2}$

(E) 1

(F) $\frac{3}{2}$

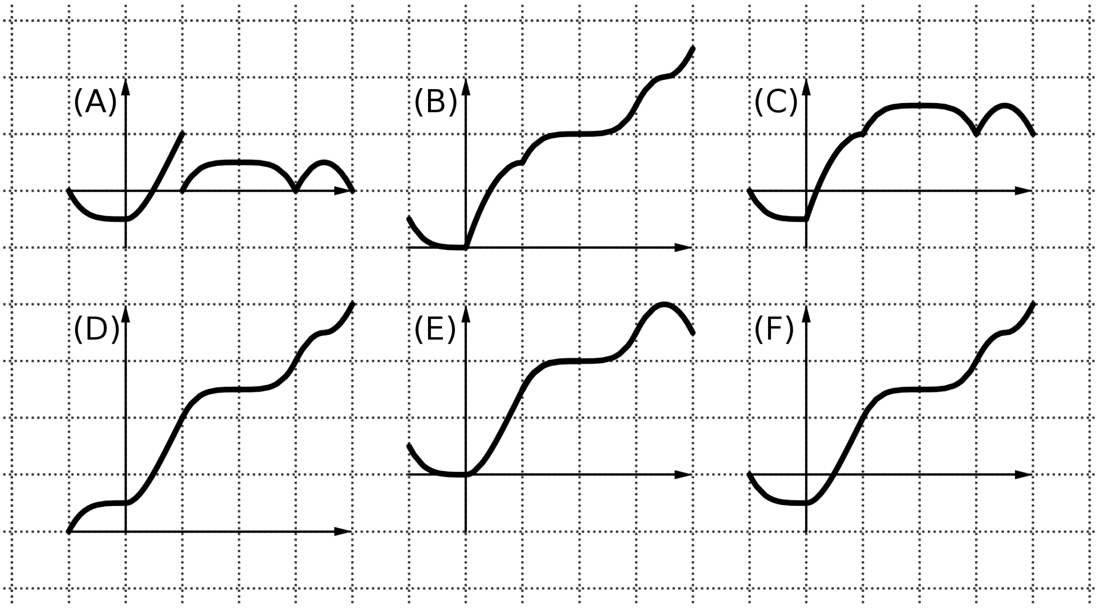
Ejercicio 9

En la imagen se muestra el gráfico de la función $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$.



Determinar cuál es el gráfico de la función

$$G(x) = \int_0^x f(t)dt.$$



Ejercicio 10

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que tiene derivadas de todos los órdenes, de la cual sabemos lo siguiente:

- $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n impar.
- $|f^{(n)}(x)| \leq 2$ para todo $n \geq 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$.

Recordemos que $P_n(f, 0)(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto 0.

Queremos hacer un cálculo aproximado de $f(1)$. Indicar el mínimo valor de n para el cual podemos asegurar que

$$|f(1) - P_n(f, 0)(1)| < 10^{-2}.$$

(A) 10 (C) 2 (E) 6

(B) 12 (D) 4 (F) 8

Recordar que $f^{(n)}$ designa a la derivada de orden n de f.
