# Matemática Inicial
Segundo Parcial, Julio de 2024.

| N° Lista | Apellido y Nombre | Cédula | Grupo |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Importante**: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

**Ejercicio 1 (21 pts)** *Sea h la función definida por*

$$h(x) = \frac{-5x+2}{2x-4}.$$

1. *Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ sea dominio de $h$. Como la expresión de $h$ es un cociente de polinomios, si el denominador es diferente de 0, entonces $h(x)$ se puede calcular. Por tanto $2x-4=0$ si y sólo si $x=2$. Con esto llegamos a que $a=2$.*

2. *Determinar las raíces y el signo de $h$. Raíz: Hay que resolver $h(x)=0$, esto es equivalente a que el numerador sea 0, es decir, $-5x+2=0$. Por tanto $\alpha = 2/5$ es la única raíz.*
   *Signo: vamos a estudiar el signo del numerador y denominador por separado.*
   *Numerador: positivo si $x<2/5$, negativo si $x>2/5$, nulo en $x=2/5$.*
   *Denominador: negativo si $x<2$, 2positivo si $x>2$, nulo en $x=2$. Por tanto el signo de $h$ queda de la siguiente manera:*

$$\begin{cases} - & si\ x < 2/5, \\ 0 & si\ x = 2/5, \\ + & si\ 2/5 < x < 2, \\ - & si\ \ > 2. \end{cases}.$$

   *Recordar que $h$ no está definida para $x=3$.*

3. *Calcular los siguientes límites:*

   a) $$\lim_{x\to a^+} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{-5x+2}^{\to -8}}{\underbrace{2x-4}_{\to 0^+}} = -\infty.$$

   b) $$\lim_{x\to a^-} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{-5x+2}^{\to -8}}{\underbrace{2x-4}_{\to 0^-}} = +\infty.$$

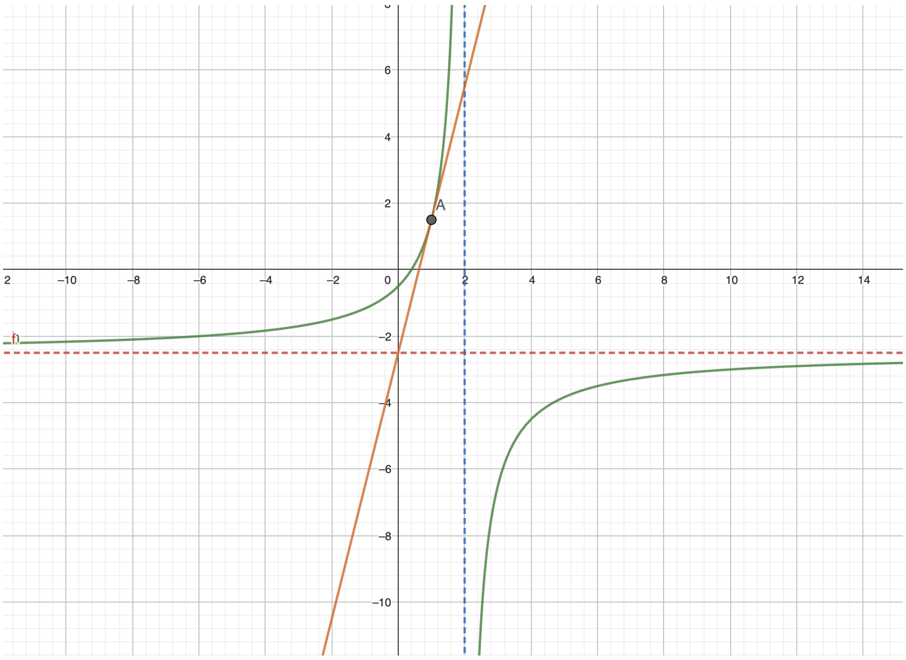


Figura 1: Bosquejo de $h$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{-5x+2}^{\sim -5x}}{\underbrace{2x-4}_{\sim 2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x}{2x} = \dfrac{-5}{2}.$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\overbrace{-5x+2}^{\sim -5x}}{\underbrace{2x-4}_{\sim 2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-5x}{2x} = \dfrac{-5}{2}.$

4. *Hallar $h'$, la derivada de $h$.*
   *Aplicamos la regla del cociente:* $h'(x) = \frac{-5(2x-4)-(-5x+2)2}{(2x-4)^2} = \frac{4}{(x-2)^2}$.

5. *Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $h$ en el punto $(1, h(1))$.*
   *La recta tangente esta dada por la ecuación* $y - h(1) = h'(1)(x-1)$.
   *Tenemos que* $h(1) = \frac{3}{2}$ *y* $h'(1) = 4$. *Entonces* $y - \frac{3}{2} = 4(x-1)$.

6. *Realizar un bosquejo de $h$. Utilizando los límites calculados anteriormente así como el signo de la función y al observar que la derivada es siempre positiva tenemos que es una función creciente, se obtiene un gráfico como en la Figura 1.*

**Ejercicio 2 (13 pts)** 1. *Calcular el siguiente límite. Justificar.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)}{1-\cos(x)}.$$

*Cuando* $x \longrightarrow 0$*, el límite tanto del numerador como del denominador es cero y por lo tanto tenemos una indeterminación. Vamos a utilizar los siguientes equivalentes para valores cercanos a cero:*

- $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$*, es decir* $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$,
- $\operatorname{sen}(x) \sim x$*, es decir* $\sin(4x) \sim 4x$.
- $e^x \sim 1+x$ *, es decir* $e^{2x}-1 \sim 2x$.

*Resulta entonces que:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin(4x)}^{\sim 4x}\overbrace{\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)}^{\sim x/2}}{\underbrace{1-\cos(x)}_{\sim x^2/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\frac{x^2}{2}} = 4$$

2. *Sea* $a \in \mathbb{R}$*, se considera la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2-18x-45}{x^2-9} & si\ x < -3 \\ a & si\ x = -3 \\ (x+3)\sin(\frac{1}{x+3}) + x + \frac{7}{2} & si\ x > -3 \end{cases}.$$

*¿Existe un valor de* $a \in \mathbb{R}$ *para el cual la función* $f$ *sea continua? En caso afirmativo hallarlo. Justificar.*

*Notar que para* $x < -3$, $f(x)$ *es un cociente de polinomios, ambos continuos en este intervalo, y el cociente de funciones continuas es continua. Para* $x > -3$, $f$ *es suma y producto de funciones continuas. Resta ver que sucede en* $x = -3$.

*Por definición de continuidad en un punto:* $f$ *es continua en* $-3$ *si* $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$.

*Para calcular el límite, dado que es una función definida por partes debemos calcular los límites laterales. Por un lado factorizando los polinomios tenemos que*

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^3+2x^2-18x-45}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x+3)(x^2-x-15)}{(x+3)(x-3)} \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2-x-15}{x-3} = \frac{1}{2}$$

*Por tanto si* $a \neq 1/2$ *se tiene que* $f$ *no es continua.*

*Para que* $f$ *sea continua debemos calcular* $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ *y ver si da como resultado* $1/2$.

$$\lim_{x\to -3^+} \underbrace{(x+3)}_{\to 0}\underbrace{\sin(\frac{1}{x+3})}_{acot.} + \underbrace{x}_{\to -3} + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

*Por tanto tomando* $a = 1/2$*, resulta que* $f$ *es continua.*

**Ejercicio 3 (16pts)** *Sean* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *las funciones definidas por* $f(x) = x - 3$ *y* $g(x) = \begin{cases} 5^x & si\ x \geq 1 \\ 3x + 2 & si\ x < 1 \end{cases}$.

1. *Graficar* $f$ *y* $g$. *Ver figuras 2 y 3.*

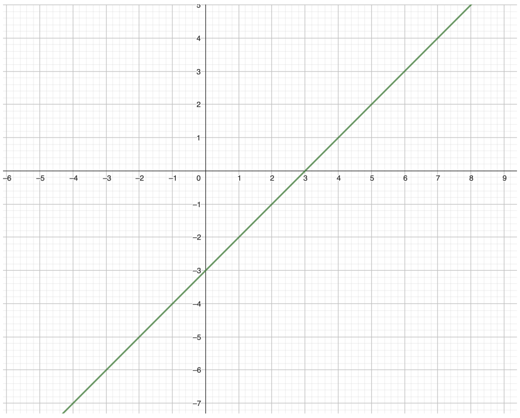

Figura 2: Bosquejo de $f$.

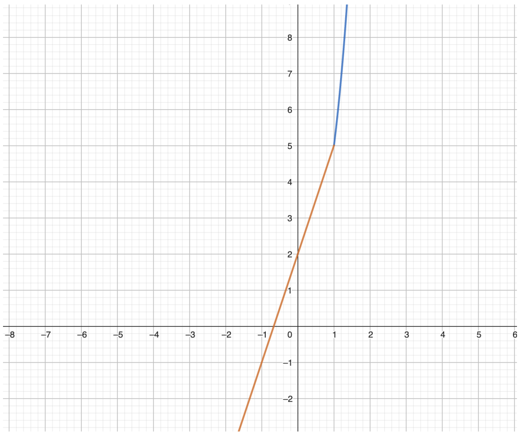

Figura 3: Bosquejo de $g$.

2. *Determinar la función* $h = g \circ f$ *y graficarla.*

   *La función compuesta* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = g \circ f(x) = g(x-3) = \begin{cases} 5^{x-3} & si\ x - 3 \geq 1 \\ 3(x-3) + 2 & si\ x - 3 < 1 \end{cases}$. *Por tanto* $h(x) = \begin{cases} 5^{x-3} & si\ x \geq 4 \\ 3x - 7 & si\ x < 4 \end{cases}$. *Notar que h es un corrimiento de g tres unidades hacia la derecha.*

3. *¿Es* $h = g \circ f$ *biyectiva? Justificar y en caso afirmativo hallar* $h^{-1}$.
   *Notar que podemos justificar la biyectividad a partir del gráfico de h.*

   *Según podemos observar del gráfico, h es monótona creciente, por lo que h es inyectiva. Además toda recta horizontal corta al gráfico de h, por lo que h es sobreyectiva. Esto implica que h es invertible.*

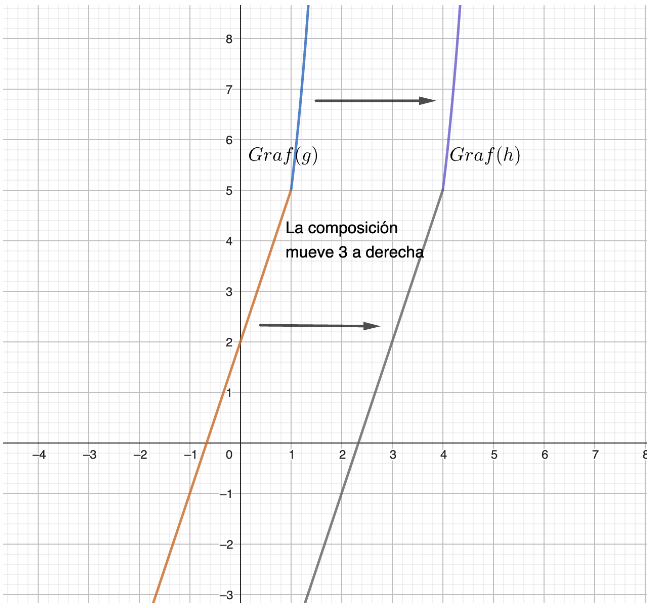


Figura 4: Bosquejo de $h = g \circ f$.

*Para calcular la inversa, observar que h es una función partida y por tanto $h^{-1}$ también lo será.*

- *Para $x \geq 4$, $h(x) \geq 5$. Por lo tanto para $y > 5$, resolvemos $y = 5^{x-3}$:*

$$y = 5^{x-3} \Leftrightarrow \log_5(y) = x - 3 \Leftrightarrow x = \log_5(y) + 3.$$

- *Para $x < 4$, se cumple que $h(x) < 5$. Por tanto para $y < 5$ resolvemos $y = 3x - 7$:*

$$y = 3x - 7 \Leftrightarrow x = (y + 7)/3.$$

*Con esto obtenemos que la inversa de h es $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} \log_5(y) + 3 & si\ x \geq 5 \\ \frac{x+7}{3} & si\ x < 5 \end{cases}.$$

*Las expresiones halladas para la inversa nos permiten deducir que para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = y$ y esto es también una forma de justificar que la función es biyectiva.*

*Finalmente otro camino para la inyectividad es resolver las ecuaciones $5^{x_1-3} = 5^{x_1-3}$ par $x \geq 4$ y $3x_1 - 7 = 3x_2 - 7$ para $x < 4$ y deducir (en este caso directamente) que entonces $x_1 = x_2$.*