Matemática Inicial

Segundo Parcial, Julio de 2024.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (21 pts) *Sea h la función definida por*

$$h(x) = \frac{-3x+1}{2x-6}.$$

1. *Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ sea dominio de h.*
   Como la expresión de h es un cociente de polinomios, si el denominador es diferente de 0, entonces $h(x)$ se puede calcular. Por tanto $2x - 6 = 0$ si y sólo si $x = 3$. Con esto llegamos a que $a = 3$.

2. *Determinar las raíces y el signo de h.*
   Raíces: hay que resolver $h(x) = 0$, esto es equivalente a que el numerador sea 0, es decir, $-3x + 1 = 0$.
   Por tanto $\alpha = 1/3$ es la única raíz.
   Signo: vamos a estudiar el signo del numerador y denominador por separado.
   Numerador: positivo si $x < 1/3$, negativo si $x > 1/3$, nulo en $x = 1/3$.
   Denominador: negativo si $x < 3$, positivo si $x > 3$, nulo en $x = 3$.
   Por tanto el signo de h queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} < 0 \text{ si } x < 1/3, \\ = 0 \text{ si } x = 1/3, \\ > 0 \text{ si } 1/3 < x < 3, \\ < 0 \text{ si } \; > 3. \end{cases}$$

   .
   Recordar que h no está definida para $x = 3$.

3. *Calcular los siguientes límites:*

   a) $$\lim_{x\to a^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{-3x+1}^{\to -8}}{\underbrace{2x-6}_{\to 0^+}} = -\infty.$$

   b) $$\lim_{x\to a^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{\overbrace{-3x+1}^{\to -8}}{\underbrace{2x-6}_{\to 0^-}} = +\infty.$$

   c) $$\lim_{x\to +\infty} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{-3x+1}^{\sim -3x}}{\underbrace{2x-6}_{\sim 2x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x}{2x} = \frac{-3}{2}.$$

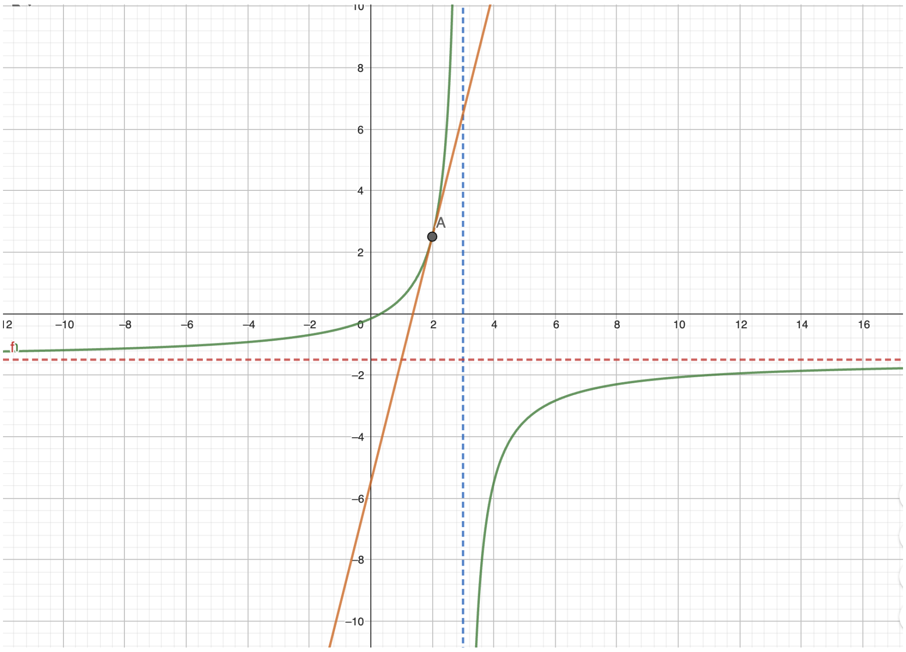

Figura 1: Bosquejo de h.

d) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} h(x) \Rightarrow . \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{-3x+1}^{\sim -3x}}{\underbrace{2x-6}_{\sim 2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{2x} = \frac{-3}{2}.$

4. *Hallar h', la derivada de h.*
   Aplicamos la regla del cociente: $h'(x) = \frac{-3(2x-6)-(-3x+1)2}{(2x-6)^2} = \frac{16}{(2x-6)^2} = \frac{4}{(x-3)^2}$.

5. *Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de h en el punto $(2, h(2))$.*
   La recta tangente está dada por la ecuación $y - h(2) = h'(2)(x-2)$.

   Tenemos que $h(2) = -\frac{5}{2}$ *y* $h'(2) = 4$, *entonces la ecuación resulta* $y - \frac{5}{2} = 4(x-2)$, *o de forma equivalente* $y = 4x - \frac{11}{2}$.

6. *Realizar un bosquejo de h. Utilizando los límites calculados anteriormente así como el signo de la función y al observar que la derivada es siempre positiva tenemos que es una función creciente, se obtiene un gráfico como en la Figura 1.*

Ejercicio 2 (13 pts) 1. *Calcular el siguiente límite. Justificar.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(3x)(e^{2x}-1)}$$

Cuando $x \to 0$, el límite tanto del numerador como del denominador es cero y por lo tanto tenemos una indeterminación. Vamos a utilizar los siguientes equivalentes para valores cercanos a cero:

- $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, *es decir* $1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$,
- $\operatorname{sen}(x) \sim x$,

- *$e^x \sim 1 + x$, es decir $e^{2x} - 1 \sim 2x$.*

Resulta entonces que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos(x)}^{\sim x^2/2}}{\underbrace{\sin(3x)}_{\sim 3x}\underbrace{(e^{2x}-1)}_{\sim 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{6x^2} = \frac{1}{12}$$

2. *Sea $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2+2x+4}{x^2-4} & si\ x < -2 \\ a & si\ x = -2 \\ (x+2)\cos(\frac{1}{x+2}) + x + \frac{1}{2} & si\ x > -2 \end{cases}.$$

¿Existe un valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual la función f sea continua? En caso afirmativo hallarlo. Justificar.

Notar que para $x < -2$, $f(x)$ es un cociente de polinomios, ambos continuos en este intervalo, y el cociente de funciones continuas es continua. Para $x > -2$, f es suma y producto de funciones continuas. Resta ver que sucede en $x = -2$.

Por definición de continuidad: f es continua en $x = -2$ si $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) = a$.

Para calcular el límite, dado que es una función definida por partes debemos calcular los límites laterales. Por un lado factorizando los polinomios tenemos que

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3+2x^2+2x+4}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x^2+2)}{(x+2)(x-2)} \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+2}{x-2} = \frac{-3}{2}$$

Por tanto si $a \neq -3/2$ ya sabemos que f no es continua.

Para que f sea continua debemos calcular $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ y ver si da como resultado $-3/2$.

$$\lim_{x\to -2^+} \overbrace{\underbrace{(x+2)}_{\to 0}\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x+2}\right)}_{acot.}}^{\to 0} + \underbrace{x}_{\to -2} + \frac{1}{2} = -2 + \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$$

Por tanto tomando $a = -3/2$, resulta que f es continua.

Ejercicio 3 (16 pts) *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x+2$ y $g(x) = \begin{cases} 3^x & si\ x \geq 1 \\ 4x-1 & si\ x < 1 \end{cases}$.*

1. *Graficar f y g. Ver figuras 2 y 3.*

2. *Determinar la función $h = g \circ f$ y graficarla.*

La función compuesta $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = \begin{cases} 3^{x+2} & si\ x+2 \geq 1 \\ 4(x+2)-1 & si\ x+2 < 1 \end{cases}$.

Por tanto $h(x) = \begin{cases} 3^{x+2} & si\ x \geq -1 \\ 4x+7 & si\ x < -1 \end{cases}$. Notar que por definición h es un corrimiento de g dos unidades hacia la izquierda. Ver figura 4.

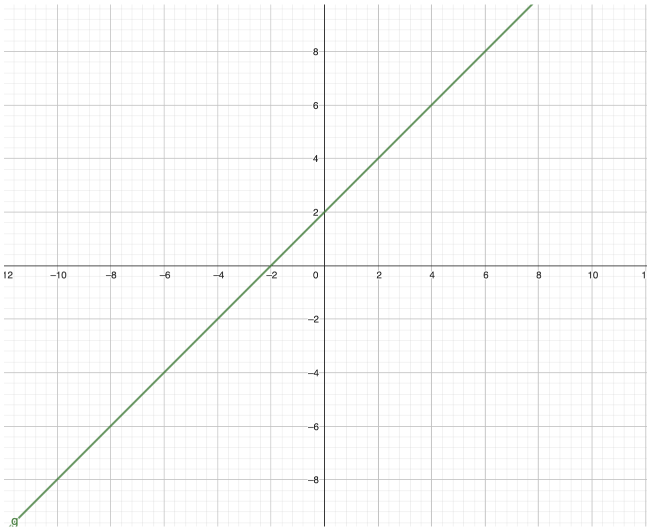

Figura 2: Bosquejo de f.

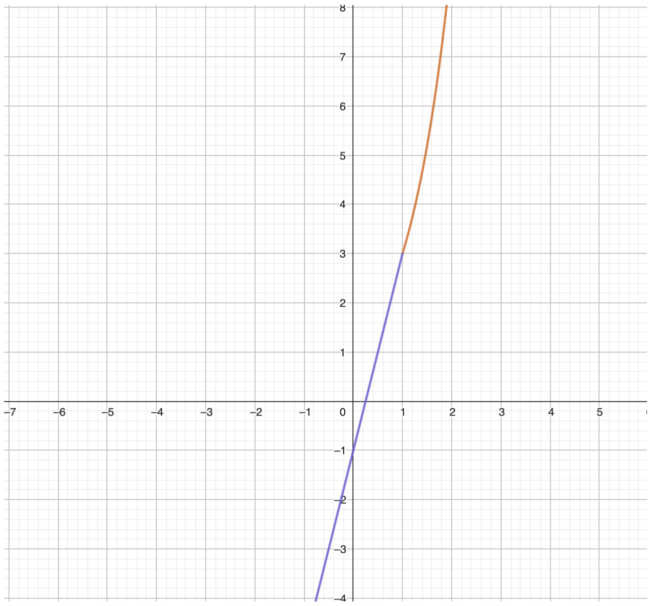

Figura 3: Bosquejo de g.

3. *¿Es $h = g \circ f$ biyectiva? Justificar y en caso afirmativo hallar h^{-1}. Notar que podemos justificar la biyectividad a partir del gráfico de h.*

   Según podemos ver del gráfico h es monótona creciente, por lo que h es inyectiva. Además toda recta horizontal corta al gráfico de h por lo que h es sobreyectiva. Esto implica que h es invertible.

   Para calcular la inversa, observar que h es una función partida y por tanto h^{-1} también lo será.

   - *Para $x \geq -1$, se cumple que $h(x) \geq 3$. Por lo tanto para $y \geq 3$, resolvemos $y = 3^{x+2}$:*

   $$y = 3^{x+2} \Leftrightarrow \log_3(y) = x + 2 \Leftrightarrow x = \log_3(y) - 2.$$

   - *Para $x < -1$, $h(x) < 3$. Por lo tanto para $y < 3$ resolvemos $y = 4x + 7$:*

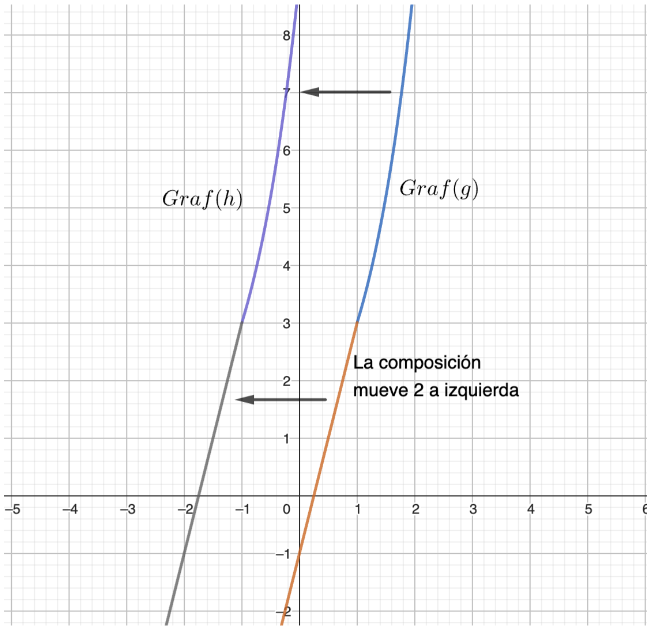

Figura 4: Bosquejo de $h = g \circ f$.

$$y = 4x + 7 \Leftrightarrow x = (y - 7)/4.$$

Con esto obtenemos que la inversa de h es $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \log_3(y) - 2 & si\ y \geq 3, \\ \frac{y-7}{4} & si\ y < 3. \end{cases}$$

Las expresiones halladas para la inversa nos permiten deducir que para cada $y \in \mathbb{R}$ *existe un único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = y$ *y esto es también una forma de justificar que la función es biyectiva.*

Finalmente otro camino para la inyectividad es resolver las ecuaciones $3^{x_1+2} = 3^{x_1+2}$ *par* $x \geq -1$ *y* $4x_1 + 7 = 4x_2 + 7$ *para* $x < -1$ *y deducir (en este caso directamente) que entonces* $x_1 = x_2$.