

SEGUNDO PARCIAL - SÁBADO 06 DE JULIO DE 2024

| Nº Prueba | Cédula | Apellido y nombre |
|-----------|--------|-------------------|
| | | |

Ejercicios múltiple opción.

Total: 30 puntos. Respuesta correcta: 5 puntos; respuesta incorrecta -1,5 puntos; no responde: 0 puntos.
Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Ejercicio 1

Sean $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ con el producto interno habitual, $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ y una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se hacen las siguientes dos afirmaciones:

- (I) T es diagonalizable.
- (II) T es autoadjunto.

Entonces:

- a) Ambas afirmaciones son verdaderas.
- b) Solamente la afirmación (I) es verdadera.
- c) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
- d) Ambas afirmaciones son falsas.

Ejercicio 2

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una simetría especular con respecto a un plano π que pasa por el origen. Se hacen las siguientes dos afirmaciones:

(I) Existe $B \xrightarrow{\text{bon}} \mathbb{R}^3$ tal que ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(II) Si $B \xrightarrow{\text{bon}} \mathbb{R}^3$ y $B' \xrightarrow{\text{bon}} \mathbb{R}^3$, entonces existe una matriz ortogonal P tal que $P_B(T)_B P^t = {}_{B'}(T)_{B'}$.

Entonces:

- a) Ambas afirmaciones son falsas.
- b) Solamente la afirmación (I) es verdadera.
- c) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
- d) Ambas afirmaciones son verdaderas.

Ejercicio 3

Sean $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}_1[x]$ y $T : V \rightarrow W$ dada por $T(p) = p'$.

Si $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ y $q(x) = a'_1 + a'_2x + a'_3x^2$, se definen los siguientes productos internos en V y en W : $\langle p, q \rangle_V = \sum_{i=1}^3 a_i a'_i$, $\langle f, g \rangle_W = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

Sea $M = {}_{\mathcal{A}}(T^*)_{\mathcal{B}}$ siendo $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B} = \{1, x\}$ las bases canónicas de V y W respectivamente.

Entonces:

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

Sea $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ de dimensión finita, $B \xrightarrow{b} V$ y $T : V \rightarrow V$ un operador lineal. Se hacen las siguientes dos afirmaciones:

(I) Existe un producto interno tal que B es ortonormal.

(II) Si T es diagonalizable entonces existe un producto interno tal que T es autoadjunta.

Entonces:

- a) Ambas afirmaciones son verdaderas.
- b) Solamente la afirmación (I) es verdadera.
- c) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
- d) Ambas afirmaciones son falsas.

Ejercicio 5

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = \frac{1}{36}(-2x + 4y + 4z, 4x - 2y + 4z, 4x + 4y - 2z)$. Con el producto interno habitual,

- a) T es un operador ortogonal no diagonalizable.
- b) T es un operador unitario autoadjunto.
- c) T es una isometría autoadjunta.
- d) T es autoadjunto pero no es una isometría.

Ejercicio 6

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una simetría axial de eje $e = [(1, 0, 2)]$ y $A :=_{\mathcal{E}} (T)_{\mathcal{E}}$ para la base canónica \mathcal{E} de \mathbb{R}^3 . Entonces:

- a) A no induce una forma cuadrática.
- b) A induce una forma cuadrática que es definida positiva.
- c) A induce una forma cuadrática que es semidefinida positiva.
- d) A induce una forma cuadrática que es indefinida.

Ejercicios de desarrollo.

Total: 30 puntos.

Ejercicio 1 (18 pt.)

- a) Sean $(V, K, +, \cdot, \langle, \rangle_V)$, $(W, K, +, \cdot, \langle, \rangle_W)$ Espacios Vectoriales, $T : V \rightarrow W$ una T.L. Defina la adjunta de T .
- b) Defina Operador Lineal autoadjunto y enuncie el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.
- c) Enuncie y demuestre el Teorema Espectral para matrices simétricas (cada resultado previo que se use debe ser claramente enunciado).

Ejercicio 2 (12 pt.)

- a) Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot, \langle, \rangle_V)$ un espacio vectorial con producto interno y dimensión finita. Defina $T : V \rightarrow V$ operador lineal ortogonal en V y matriz ortogonal en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- b) i. Enuncie una condición necesaria y suficiente sobre la matriz asociada de un operador para que dicho operador sea ortogonal.
ii. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual y $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una T.L. dada por $T(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$. Demuestre que T es un operador ortogonal diagonalizable y encuentre una base ortonormal que diagonalice a T .