Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Primer Semestre 2024**

SEGUNDO PARCIAL - SÁBADO 06 DE JULIO DE 2024

Nº Prueba	Cédula	Apellido y nombre

Ejercicios múltiple opción.

Total: 30 puntos. Respuesta correcta: 5 puntos; respuesta incorrecta -1,5 puntos; no responde: 0 puntos. **Sólo se consideran válidas las respuestas escritas en los casilleros y espacios correspondientes.**

1	2	3	4	5	6

Ejercicio 1

Sean $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}_1[x]$ y $T : V \to W$ dada por $T(p) = p'$.
Si $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ y $q(x) = a'_1 + a'_2x + a'_3x^2$, se definen los siguientes productos internos en V y en W: $\langle p, q\rangle_V = \sum_{i=1}^{3} a_i a'_i$, $\langle f, g\rangle_W = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.
Sea $M = {}_{\mathcal{A}}(T^*)_{\mathcal{B}}$ siendo $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B} = \{1, x\}$ las bases canónicas de V y W respectivamente. Entonces:

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2

Sean $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$ con el producto interno habitual, $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ y una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se hacen las siguientes dos afirmaciones:

(I) T es diagonalizable.

(II) T es autoadjunto.

Entonces:

a) Solamente la afirmación (II) es verdadera.
b) Ambas afirmaciones son verdaderas.
c) Solamente la afirmación (I) es verdadera.
d) Ambas afirmaciones son falsas.

Ejercicio 3

Sea $(V, \mathbb{R}, +, .)$ de dimensión finita, $B \overset{b}{\to} V$ y $T : V \to V$ un operador lineal. Se hacen las siguientes dos afirmaciones:

(I) Existe un producto interno tal que B es ortonormal.

(II) Si T es diagonalizable entonces existe un producto interno tal que T es autoadjunta.

Entonces:

a) Ambas afirmaciones son verdaderas
b) Solamente la afirmación (I) es verdadera
c) Ambas afirmaciones son falsas
d) Solamente la afirmación (II) es verdadera

Ejercicio 4

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una simetría especular con respecto a un plano π que pasa por el origen. Se hacen las siguientes dos afirmaciones:

(I) Existe $B \overset{bon}{\to} \mathbb{R}^3$ tal que $_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(II) Si $B \overset{bon}{\to} \mathbb{R}^3$ y $B' \overset{bon}{\to} \mathbb{R}^3$, entonces existe una matriz ortogonal P tal que $P_B(T)_B P^t =_{B'} (T)_{B'}$.

Entonces:

a) Ambas afirmaciones son falsas.
b) Solamente la afirmación (I) es verdadera.
c) Ambas afirmaciones son verdaderas.
d) Solamente la afirmación (II) es verdadera.

Ejercicio 5

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = \frac{1}{36}(-2x + 4y + 4z, 4x - 2y + 4z, 4x + 4y - 2z)$.
Con el producto interno habitual,

a) T es una isometría autoadjunta.
b) T es autoadjunto pero no es una isometría.
c) T es un operador ortogonal no diagonalizable.
d) T es un operador unitario autoadjunto.

Ejercicio 6

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una simetría axial de eje $e = [(1, 0, 2)]$ y $A :=_{\mathcal{E}} (T)_{\mathcal{E}}$ para la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.
Entonces:

a) A induce una forma cuadrática que es definida positiva.
b) A induce una forma cuadrática que es indefinida.
c) A induce una forma cuadrática que es semidefinida positiva.
d) A no induce una forma cuadrática.

Ejercicios de desarrollo.

Total: 30 puntos.

Ejercicio 1 (18 pt.)

a) Sean $(V, K, +, ., <, >_V)$, $(W, K, +, ., <, >_W)$ Espacios Vectoriales,
$T : V \to W$ una T.L. Defina la adjunta de T.
b) Defina Operador Lineal autoadjunto y enuncie el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.
c) Enuncie y demuestre el Teorema Espectral para matrices simétricas (cada resultado previo que se use debe ser claramente enunciado).

Ejercicio 2 (12 pt.)

a) Sea $(V, \mathbb{K}, +, ., <, >_V)$ un espacio vectorial con producto interno y dimensión finita. Defina $T : V \to V$ operador lineal ortogonal en V y matriz ortogonal en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b)
   i. Enuncie una condición necesaria y suficiente sobre la matriz asociada de un operador para que dicho operador sea ortogonal.
   ii. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una T.L. dada por $T(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$. Demuestre que T es un operador ortogonal diagonalizable y encuentre una base ortonormal que diagonalice a T.