Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Primer semestre de 2024

Segundo parcial

8 de julio de 2024

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene cinco ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **En el desarrollo, todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.**
- La siguiente tabla de valores para las funciones trigonométricas puede ser de utilidad:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 35 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 7 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 25 puntos)

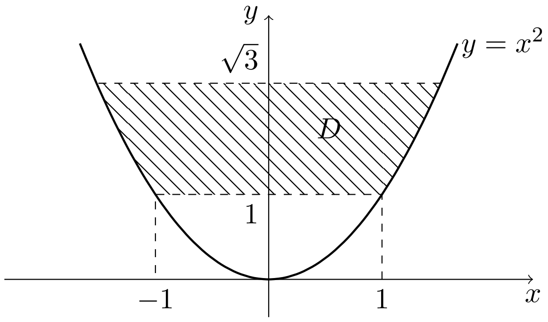
Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.1.c)	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea f la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}(1+y^2)}$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto rayado de la figura:



Entonces la integral de f en D vale:

(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$ (E) $\dfrac{3\pi}{4}$

---

2. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función tal que $f(e,\pi,1) = (1,-1)$ y $J_f(e,\pi,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que:

- g es diferenciable en $(1,-1)$
- $g(x,-1) = \operatorname{sen}(\pi x)\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{v}}(1,-1) = -2$ con $\vec{v} = (1,1)$

Si $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está definida como $h(x,y,z) = g(f(x,y,z))$, indicar cuánto vale $\dfrac{\partial h}{\partial z}(e,\pi,1)$:

(A) $\dfrac{\partial h}{\partial z}(e,\pi,1) = \pi$ (B) $\dfrac{\partial h}{\partial z}(e,\pi,1) = 2-\pi$ (C) $\dfrac{\partial h}{\partial z}(e,\pi,1) = \pi - 1$

(D) $\dfrac{\partial h}{\partial z}(e,\pi,1) = -1$ (E) $\dfrac{\partial h}{\partial z}(e,\pi,1) = 2\pi + 1$

---

3. El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + \pi y)}{\pi}$ en el punto $(0,-1)$ es:

(A) $p_2(x,y) = -(y+1) + (y+1)^2 + x(y+1)$ (B) $p_2(x,y) = -1 + 2x - y - x^2$

(C) $p_2(x,y) = 2 + \dfrac{x^2}{\pi} - 2y^2$ (D) $p_2(x,y) = -1 - y - \dfrac{x^2}{\pi}$

(E) $p_2(x,y) = -y - x^2 - y^2 + 2xy$

---

4. Hallar el valor de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los cuales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 + x^\alpha y + x y^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \beta & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

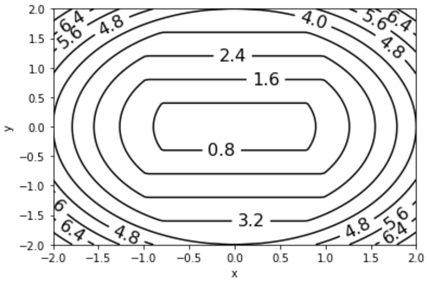
es continua en $(0,0)$.

(A) $\alpha = 2, \beta = 0$ (B) $\alpha < 1, \beta = 0$ (C) $\alpha > 1, \beta = 1$

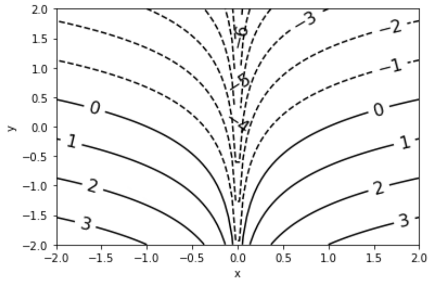
(D) $\alpha < 1, \beta = 1$ (E) $\alpha = 1, \beta = 0$

---

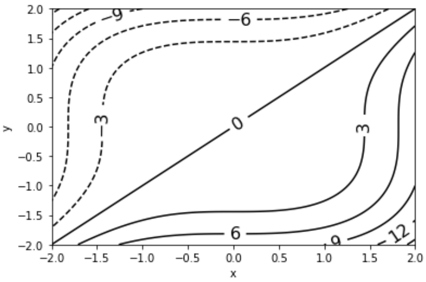
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = \log(10 + x^2 + y^2 - 2x - 2y)$. Entonces, la figura que más se asemeja a las curvas de nivel de f es:



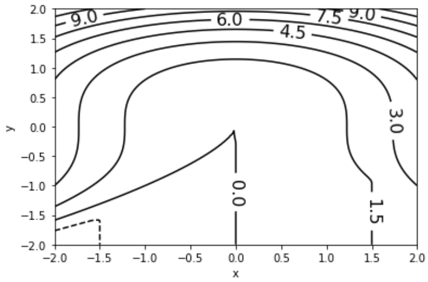
(A)



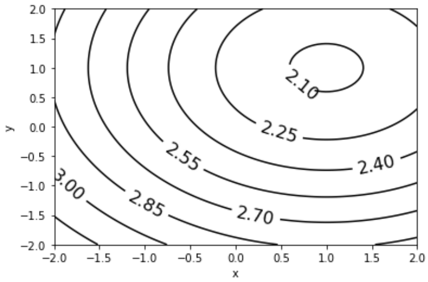
(B)



(C)



(D)



(E)

DESARROLLO

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función.

(a) Definir diferenciabilidad de f en un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (Decimos que f es diferenciable en $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sii ...)

(b) Demostrar que si f es diferenciable en un punto $a = (x_0, y_0)$, entonces existen las dos derivadas parciales en ese punto. Relacionar dichas derivadas con los elementos que aparecen en la definición del ítem anterior.

(c) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2y^3 + x^2y^2 + xy^2 + 2x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular, si existen, las derivadas parciales en el origen, y estudiar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

---

2. (a) Realizar un bosquejo del siguiente conjunto:

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

(b) Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = z$ en el dominio:

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$
