Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Primer semestre de 2024

Solución segundo parcial

8 de julio de 2024

MÚLTIPLE OPCIÓN

Las versiones del parcial se identifican por el primer ejercicio de múltiple opción.
Versión 1: El primer ejercicio es "Sea f la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}(1 + y^2)}$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto rayado de la figura ..."
Versión 2: El primer ejercicio es "Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = \log(10 + x^2 + y^2 - 2x - 2y)$. Entonces, la figura que más se asemeja a las curvas de nivel de f es ..."
Las respuestas correctas para cada versión son:

Versión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	D	B	D	C	E
2	A	C	E	D	C

DESARROLLO

1. (*a*) Ver definición 7.12 en las notas del curso.

(*b*) Ver demostración de la parte 2 del Teorema 7.13 en las notas del curso.

(*c*) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2y^3 + x^2y^2 + xy^2 + 2x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular, si existen, las derivadas parciales en el origen, y estudiar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.
Las derivadas parciales valen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h^3}{h^2} - 0\right] = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2h^3}{h^2} - 0\right] = 2.$$

Por lo tanto, la definición de diferenciabilidad queda en este caso

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) = 0 + \Delta x + 2\Delta y + r(\Delta x, \Delta y).$$

Despejando, la expresión del resto para $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ es

$$\begin{aligned} r(\Delta x, \Delta y) &= \frac{\Delta x^3 + 2\Delta y^3 + \Delta x^2\Delta y^2 + \Delta x\Delta y^2 + 2\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - \Delta x - 2\Delta y \\ &= \frac{\Delta x^3 + 2\Delta y^3 + \Delta x^2\Delta y^2 + \Delta x\Delta y^2 + 2\Delta x^2\Delta y - \Delta x^3 - \Delta x\Delta y^2 - 2\Delta y\Delta x^2 - 2\Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &= \frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto el límite que debemos calcular es:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{r(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

En coordenadas polares, el límite resulta

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2(\theta)\rho^2\sin^2(\theta)}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 0,$$

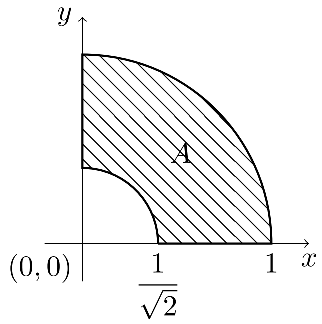
pues resulta una función acotada $(\cos^2(\theta)\sin^2(\theta))$ por ρ. Por lo tanto la función es diferenciable.

---

2. (a) Realizar un bosquejo del siguiente conjunto:

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ \frac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 1\right\}.$$

El conjunto A es el conjunto de puntos del primer cuadrante comprendido entre la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y la circuenferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Un bosquejo de ese conjunto es:



(b) Calcular la integral de la función $f(x,y,z)=z$ en el dominio:

$$D = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ \frac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 1,\ x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}.$$

Es fácil ver que las primeras condiciones del conjunto D conciden con las del item anterior. El agregado es la esfera. El conjunto D es entonces, una base como la diagramada en el item anterior, y en la coordenada z se extiende desde el 0 hasta la esfera.

Tomemos coordenadas cilíndricas. Para recorrer el conjunto A, hacemos variar el ángulo θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y el ρ entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y 1. Luego el z varía entre 0 y la esfera, que en coordenadas cilíndricas tiene ecuación $\rho^2+z^2=1$. La integral entonces resulta:

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z\rho\, dzd\rho d\theta.$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z\rho\, dzd\rho d\theta &= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \rho\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \rho(1-\rho^2)d\rho \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right] = \frac{\pi}{64}.
\end{aligned}$$
