Segundo Parcial - Topología y Análisis Real

Jueves 4 de julio de 2024 (15:00 - 19:00)

John Doe	**0.000.000-0**	**J. D.**
Nombre y Apellido	Cédula de Identidad	Firma

Pregunta 1

Sea (M, d) un espacio métrico y $X_1, \ldots, X_n \subseteq M$ una colección finita de subconjuntos compactos. Demuestre que tanto $\bigcup_{i=1}^n X_i$ como $\bigcap_{i=1}^n X_i$ son subconjuntos compactos de M. ¿Qué ocurre con las operaciones anteriores si se considera una colección arbitraria de subconjuntos compactos de M? `(10 puntos)`

<u>Solución</u>: Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de $\bigcup_{i=1}^n X_i$, es decir, $\bigcup_{i=1}^n X_i \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Como $X_j \subseteq \bigcup_{i=1}^n X_i$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de X_j. Como X_j es compacto, existe $\{\lambda_1^j, \ldots, \lambda_{m_j}^j\} \subseteq \Lambda$ finito tal que $X_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_j} U_{\lambda_k^j}$. Luego, se tiene que $\{U_{\lambda_k^j} \ / \ 1 \leq k \leq m_j \text{ y } 1 \leq j \leq n\}$ es un subcubrimiento abierto finito de $\bigcup_{i=1}^n X_i$ obtenido a partir del cubrimiento original $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^n X_i$ es un subconjunto compacto de M.

Consideremos ahora una colección arbitraria de subconjuntos compactos de M, digamos $\{X_i\}_{i \in I}$. Como cada X_i es compacto, se tiene en particular que X_i es cerrado. Por un lado, la intersección arbitraria de subconjuntos cerrados de M es cerrado, por lo cual $\bigcap_{i \in I} X_i$ es cerrado en M. Por otro lado, si fijamos $i_0 \in I$ cualquiera, tenemos que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es un subconjunto cerrado del subespacio compacto X_{i_0}, y como todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto, se tiene entonces que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es un subconjunto compacto de X_{i_0} (y por lo tanto de M). Usando un argumento similar, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n X_i$ es compacto para una colección finita $X_1, \ldots, X_n$ de subconjuntos compactos de M.

Finalmente, respecto a la unión arbitraria de compactos, considere por ejemplo $X_i = [-i, i]$ con $i \in \mathbb{N}$. Si tomamos a $\mathbb{R}$ con la topología métrica usual, se tiene que cada X_i es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (por ser cerrado y acotado). Por otro lado, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \mathbb{R}$ no es compacto.

Pregunta 2

Sea $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ (esto es, la σ-álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}$ según la topología usual).

(a) Demuestre que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ coincide con la σ-álgebra en $\mathbb{R}$ generada por todos los intervalos de la forma $[a, b]$ (con $a \leq b$). `(4 puntos)`

Solución: Sea $\mathcal{K} = \{[a, b] \ / \ a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a \leq b\}$. Si $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ denota la σ-álgebra generada por $\mathcal{K}$, veamos que $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Sea $[a, b] \in \mathcal{K}$. Vemos que $[a, b] = \mathbb{R} - ((-\infty, a) \cup (b, +\infty))$. Como $(-\infty, a)$ y $(b, +\infty)$ son abiertos y $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es una σ-álgebra, se tiene que

$$[a, b] = \mathbb{R} - ((-\infty, a) \cup (b, +\infty)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Luego, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Por otro lado, como $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{K}$, se tiene que

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Ahora, considere $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Es conocido que U se puede escribir de la forma $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Entonces, para probar que $U \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$, al ser $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ una σ-álgebra, es suficiente con probar que cada (a_n, b_n) pertenece a $\mathcal{A}(\mathcal{K})$. En efecto,

$$(a_n, b_n) = [a_n, b_n] - ([a_n, a_n] \cup [b_n, b_n]) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}),$$

ya que $[a_n, b_n], [a_n, a_n], [b_n, b_n] \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ es una σ-álgebra. Por lo tanto, si τ denota la colección de todos los abiertos de $\mathbb{R}$, se tiene que $\tau \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{K})$, y como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a τ, obtenemos finalmente que

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

(b) Sea C el conjunto de Cantor. Describa la construcción de C y concluya que C es un conjunto boreliano de $\mathbb{R}$ (es decir, $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$). `(4 puntos)`

Solución: Considere el intervalo compacto $I = [0, 1]$.

- Paso 1: Se divide I en tres intervalos de longitud $1/3$ y se extrae el intervalo abierto del medio (dado por $(1/3, 2/3)$). Denotamos entonces

  $$P_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

  Note que P_1 es la unión disjunta de $2 = 2^1$ intervalos compactos de longitud $1/3 = 1/3^1$. En particular, $P_1 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ por la parte (a).

- Paso 2: Se dividen los intervalos $[0,1/3]$ y $[2/3,1]$ en tres partes iguales de longitud $1/9 = 1/3^2$, y se extraen de P_1 los intervalos abiertos $(1/9,2/9)$ y $(7/9,8/9)$, formando así el conjunto

$$P_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right],$$

que resulta ser la unión disjunta de $4 = 2^2$ intervalos compactos de longitud $1/9 = 1/3^2$, de donde $P_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

- Se sigue con el procedimiento anterior indefinidamente. Al llegar al n-ésimo paso, se obtiene el conjunto $P_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} K_{n,i} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, unión disjunta de 2^n intervalos compactos de longitud $1/3^n$, construido a partir de $P_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} K_{n-1,i}$ al extraer de cada intervalo compacto $K_{n-1,i}$ el segundo intervalo abierto resultante de dividir $K_{n-1,i}$ en tres partes con la misma longitud.

- Finalmente, el conjunto de Cantor, denotado por C, se define como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n,$$

el cual pertenece a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ por ser una intersección numerable de conjuntos en $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Alternativamente, C se obtiene a partir de $[0,1]$ al extraer:
  - 1 intervalo abierto de longitud $1/3$ en el primer paso, al cual denotaremos por $I_{1,1}$.
  - 2 intervalos abiertos de longitud $1/3^2$ en el segundo paso, a los cuales denotaremos por $I_{2,1}$ e $I_{2,2}$.
  - $4 = 2^2$ intervalos abiertos de longitud $1/3^3$ en el tercer paso, a los cuales denotaremos por $I_{3,1}$, $I_{3,2}$, $I_{3,3}$ e $I_{3,4}$.
  - En el n-ésimo paso se la construcción, se extraen 2^{n-1} intervalos abiertos de longitud $1/3^n$, los cuales denotaremos por $I_{n,1}, I_{n,2}, \dots, I_{n,i}, \dots, I_{n,2^{n-1}}$.

Notamos que

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_{n,i} \right)$$

es una unión disjunta y numerable de intervalos abiertos, por lo cual $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Por otro lado, note que $C = [0,1] - U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

(c) Calcule la medida de Lebesgue de C. `(2 puntos)`

Solución: Por las propiedades de la medida de Lebesgue, como $[0,1]$ tiene medida finita, se tiene que

$$m_{\mathcal{L}}(C) = m_{\mathcal{L}}([0,1]) - m_{\mathcal{L}}(U).$$

Por otro lado, por la propiedad de σ-aditividad, se tiene que

$$m_{\mathcal{L}}(U) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} m_{\mathcal{L}}(I_{n,i})\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Por lo tanto,

$$m_{\mathcal{L}}(C) = m_{\mathcal{L}}([0,1]) - m_{\mathcal{L}}(U) = 1 - 1 = 0.$$

Pregunta 3

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible Lebesgue, $f\colon E \to \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que $g \circ f$ es también una función medible Lebesgue. `(5 puntos)`

Solución: Hay que demostrar que para todo $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, se tiene que $(g \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra generada por todos los abiertos de $\mathbb{R}$, y la operación de imagen inversa es cerrada por uniones, intersecciones y complementos, bastaría con demostrar lo anterior para el caso donde B es abierto.

Sea entonces B abierto en $\mathbb{R}$. Por un lado, $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$. Por otro lado, $g^{-1}(B)$ es abierto en $\mathbb{R}$ ya que g es continua. Esto a su vez implica que $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, ya que f es medible y $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

(b) Dé un ejemplo de una función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en casi todas partes para la cual no existe una función continua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h = g$. `(5 puntos)`

Solución: Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) := \begin{cases} \tan(x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

El conjunto donde h es discontinua viene dado por

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\},$$

el cual es numerable y, por ende, tiene medida cero. Entonces h es continua en casi todas partes.

Por otro lado, supongamos que existe una función continua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h = g$. Entonces,

$$\lim_{x \to \pi/2} h(x) = \lim_{x \to \pi/2} g(x) = g(\pi/2) \in \mathbb{R},$$

pero esto es una contradicción ya que $\lim_{x\to\pi/2} h(x) = \lim_{x\to\pi/2} \tan(x)$ no existe. Por lo tanto, para la función h mostrada, no es cierto que exista una función continua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h = g$.

Pregunta 4

(a) Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ medibles Lebesgue y disjuntos dos-a-dos (esto es, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$). Demuestre que

$$\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{E_i}.$$

(2 puntos)

Notación: $\mathbb{I}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - A. \end{cases}$

Solución: Usemos inducción sobre n.

- Para $n = 2$, se tiene que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Entonces para $x \in E_1 \cup E_2$, o bien $x \in E_1$ y $x \notin E_2$, o $x \in E_2$ y $x \notin E_1$. Para el primer caso, se obtiene

  $$\mathbb{I}_{E_1 \cup E_2}(x) = 1, \;\; \mathbb{I}_{E_1}(x) = 1 \;\text{ y }\; \mathbb{I}_{E_2}(x) = 0.$$

  Así, $\mathbb{I}_{E_1 \cup E_2}(x) = \mathbb{I}_{E_1}(x) + \mathbb{I}_{E_2}(x)$. Para el segundo caso, se obtiene de forma análoga la igualdad anterior.

  Por otro lado, si $x \notin E_1 \cup E_2$, entonces $x \notin E_1$ y $x \notin E_2$, por lo cual

  $$\mathbb{I}_{E_1 \cup E_2}(x) = 0, \;\; \mathbb{I}_{E_1}(x) = 0 \;\text{ y }\; \mathbb{I}_{E_2}(x) = 0.$$

  Así, $\mathbb{I}_{E_1 \cup E_2}(x) = \mathbb{I}_{E_1}(x) + \mathbb{I}_{E_2}(x)$. Por lo tanto,

  $$\mathbb{I}_{E_1 \cup E_2} = \mathbb{I}_{E_1} + \mathbb{I}_{E_2}.$$

- Supongamos que la igualdad se cumple para $n - 1$, es decir,

  $$\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{I}_{E_i}.$$

Sea $A = \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$. Se tiene que A y E_n son conjuntos medibles y disjuntos. Por el caso $n = 2$, se tiene que

$$\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n E_i} = \mathbb{I}_{A \cup E_n} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_{E_n}.$$

Por otro lado, por la hipótesis inductiva se tiene que

$$\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n E_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{I}_{E_i} + \mathbb{I}_{E_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{E_i}.$$

(b) Para $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ como en la parte (a), considere la sucesión de funciones $\{u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$u_n = \mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}.$$

Demuestre que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y que converge puntualmente a $\mathbb{I}_E$, donde $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. (3 puntos)

Solución: Primero probemos que $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i$, se tiene que $u_n(x) = 0$, de donde claramente $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$ para este caso. Si por el contrario $x \in \bigcup_{i=1}^n E_i$, entonces $x \in \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$ ya que $\bigcup_{i=1}^n E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$. En este caso, $u_n(x) = 1 = u_{n+1}(x)$, por lo que también se cumple la desigualdad.

Probemos ahora que $u_n \to \mathbb{I}_E$ puntualmente, es decir,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = \mathbb{I}_E(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Si $x \notin E$ (es decir, $\mathbb{I}_E(x) = 0$), entonces $x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i$ para ningún n, por lo cual $u_n(x) = 0$. En este caso, claramente se cumple que $u_n(x) \to \mathbb{I}_E(x)$. Supongamos ahora que $x \in E$, es decir, $\mathbb{I}_E(x) = 1$. Sea N el menor entero positivo para el cual $x \in E_N$. Entonces, $x \in \bigcup_{i=1}^n E_i$ para todo $n \geq N$, es decir, $u_n(x) = 1$ para todo $n \geq N$. Como $u_n(x)$ es la sucesión constantemente igual a 1 a partir de N, se tiene claramente en este caso que $u_n(x) \to \mathbb{I}_E(x)$. En cualquier caso, ocurre que $u_n(x) \to \mathbb{I}_E(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\{u_n\}$ converge puntualmente a $\mathbb{I}_E$.

(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa, medible Lebesgue, e integrable (esto es, $\int f < \infty$). Considere la σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ formada por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ medibles Lebesgue, y defina la función $\mu : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\mu(E) = \int_E f \, , \text{ para todo } E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}.$$

Demuestre que μ es una medida sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. (5 puntos)

Sugerencia: Para demostrar la σ-aditividad, puede ser útil aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona a partir de la parte (b).

Solución:

- μ es no negativa:

  Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible Lebesgue. Por la propiedad de monotonía de la integral de Lebesgue de funciones no negativas (o directamente a partir de la definición de dicha integral), como $f \geq 0$, se tiene que

  $$\mu(E) = \int_E f \geq 0.$$

- $\mu(\emptyset) = 0$:

  Como $\emptyset$ tiene medida cero, por las propiedades de la integral de Lebesgue de funciones no negativas, se tiene que

  $$\mu(\emptyset) = \int_\emptyset f = 0.$$

- μ es σ-aditiva:

  Sea $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ medibles y disjuntos dos-a-dos. Veamos que

  $$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i),$$

  es decir,

  $$\int f \cdot \mathbb{I}_E = \int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} f = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f = \sum_{i=1}^\infty \int f \cdot \mathbb{I}_{E_i}.$$

  Para probar esta igualdad, considere la sucesión de funciones

  $$f_n = \sum_{i=1}^n f \cdot \mathbb{I}_{E_i} = f \cdot \mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}.$$

  Como $\{\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n E_i}\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones monótona creciente que converge puntualmente a $\mathbb{I}_E$ y $f \geq 0$, se tiene que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones monótona creciente que converge puntualmente a $f \cdot \mathbb{I}_E$. Luego, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que

  $$\int f \cdot \mathbb{I}_E = \lim_{n \to +\infty} \int f_n.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \int f \cdot \mathbb{I}_E = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int \left(\sum_{i=1}^{n} f \cdot \mathbb{I}_{E_i} \right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \int f \cdot \mathbb{I}_{E_i} \right) \qquad \text{(por la aditividad de la integral de Lebesgue)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).
\end{aligned}$$