Segundo Parcial - Topología y Análisis Real

Jueves 4 de julio de 2024 (15:00 - 19:00)

Nombre y Apellido	Cédula de Identidad	Firma

Pregunta 1

Sea (M, d) un espacio métrico y $X_1, \ldots, X_n \subseteq M$ una colección finita de subconjuntos compactos. Demuestre que tanto $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ como $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ son subconjuntos compactos de M. ¿Qué ocurre con las operaciones anteriores si se considera una colección arbitraria de subconjuntos compactos de M? `(10 puntos)`

Pregunta 2

Sea $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ (esto es, la σ-álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}$ según la topología usual).

(a) Demuestre que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ coincide con la σ-álgebra en $\mathbb{R}$ generada por todos los intervalos de la forma $[a, b]$ (con $a \leq b$). `(4 puntos)`

(b) Sea C el conjunto de Cantor. Describa la construcción de C y concluya que C es un conjunto boreliano de $\mathbb{R}$ (es decir, $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$). `(4 puntos)`

(c) Calcule la medida de Lebesgue de C. `(2 puntos)`

Pregunta 3

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible Lebesgue, $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible Lebesgue y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que $g \circ f$ es también una función medible Lebesgue. `(5 puntos)`

(b) Dé un ejemplo de una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en casi todas partes para la cual no existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h = g$. `(5 puntos)`

Pregunta 4

(a) Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ medibles Lebesgue y disjuntos dos-a-dos (esto es, $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$). Demuestre que

$$\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{E_i}.$$

(2 puntos)

Notación: $\mathbb{I}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - A. \end{cases}$

(b) Para $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ como en la parte (a), considere la sucesión de funciones $\{u_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$u_n = \mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}.$$

Demuestre que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y que converge puntualmente a $\mathbb{I}_E$, donde $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. (3 puntos)

(c) Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa, medible Lebesgue, e integrable (esto es, $\int f < \infty$). Considere la σ-álgebra $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ formada por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ medibles Lebesgue, y defina la función $\mu \colon \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\mu(E) = \int_E f \ , \ \text{ para todo } E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}.$$

Demuestre que μ es una medida sobre $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. (5 puntos)

Sugerencia: Para demostrar la σ-aditividad, puede ser útil aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona a partir de la parte (b).

Puntajes (para uso exclusivo del docente)			
Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4