PRÁCTICO 10

Grafos II: Grado, isomorfismo, árboles, caminos y circuitos eulerianos

(Secciones 11.2, 11.3 y 12.1)

Definiciones y suposiciones:

- Todos los grafos de este práctico son no dirigidos y simples, es decir, sin lazos ni aristas múltiples.
- Un vértice v de un grafo G es *aislado* si no es adyacente a ningún otro vértice de G.
- El *grafo complemento* de G, que se denota $\overline{G}$, tiene como conjunto de vértices a $V(G)$ y como conjunto de aristas a $V^{(2)} \setminus E$, donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.
- Un grafo G se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\overline{G}$.
- Si G_1 y G_2 son dos grafos disjuntos entonces su *grafo unión*, que se denota $G_1 \cup G_2$, tiene como conjunto de vértices a $V(G_1) \cup V(G_2)$ y como conjunto de aristas a $E(G_1) \cup E(G_2)$.
- Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.
- Un grafo se dice *k–regular* si cada uno de sus vértices tiene grado k. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1. Cuando el grafo es un árbol, también llamamos *hojas* a los vértices colgantes.

Grado

Ejercicio 1.

a. Hallar el número de vértices de un grafo 3–regular con 9 aristas.

b. Hallar el número de vértices que tiene un grafo con diez aristas, dos vértices de grado 4 y los demás vértices de grado 3.

c. ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 2. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 3. Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de $\overline{G}$ tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 4.

a. ¿Cuál es el máximo número de vértices posible para un grafo con 17 aristas si cada uno de sus vértices tiene grado mayor que o igual a 3?

b. ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 5. Construir, para cada número natural n par tal que $n \geq 4$, un grafo G_n que sea conexo 3–regular con exactamente n vértices.

Ejercicio 6. Demostrar que todo grafo no trivial tiene al menos vértices con el mismo grado.

Isomorfismo

Ejercicio 7.

a. Demostrar que dos grafos son isomorfos si y sólo si sus complementos son isomorfos.

b. ¿Cuáles de los grafos de la Figura 5 son isomorfos?

c. Determine el número de aristas de $\overline{G}$ en función del número de aristas de G.

d. Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n.

e. Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

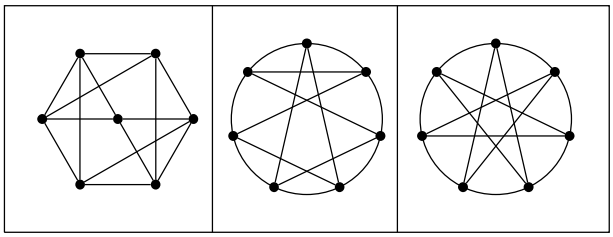
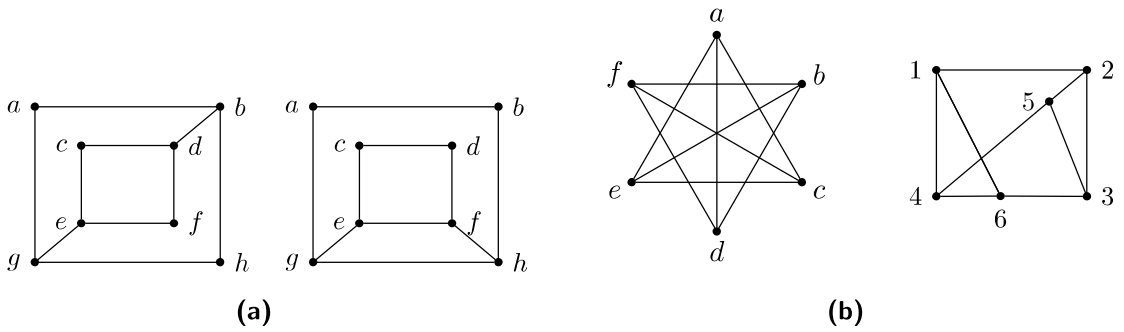


Figura 5

Ejercicio 8. Para cada par de grafos de la Figura 6 determine si los grafos son o no isomorfos.



(a) **(b)**

Figura 6

Ejercicio 9. Probar que K_n posee tres subgrafos dos a dos isomorfos cuyos conjuntos de aristas son una partición del conjunto de aristas de K_n si y sólo si n es de la forma $3k$ o $3k+1$.

Árboles

Ejercicio 10. Un bosque es un grafo acìclico (equivalentemente, sus componentes conexas son árboles).

a. Sea $F_1 = (V_1, E_1)$ un bosque de siete árboles con $|E_1| = 40$. ¿Cuánto vale $|V_1|$?
b. Si $F_2 = (V_2, E_2)$ es un bosque con $|V_2| = 62$ y $|E_2| = 51$, ¿cuántos árboles determina F_2?

Ejercicio 11. Sea G un bosque con exactamente dos árboles, que llamaremos T_1 y T_2. Hallar el número de vértices tanto de T_1 como de T_2 sabiendo que $|E(T_1)| = 17$ y que $|V(T_2)| = 2|V(T_1)|$.

Ejercicio 12. ¿Cuántas hojas tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

Ejercicio 13. ¿Qué tipo de árboles tienen exactamente dos hojas?

Ejercicio 14. Dar un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas. Probar que cualquier grafo que verifique las condiciones anteriores no puede ser conexo.

Ejercicio 15. Probar que todo árbol con n vértices y m aristas tiene al menos $n-m$ componentes conexas.

Ejercicio 16. ¿Cuál es la máxima cantidad de vértices que puede tener un grafo conexo con exactamente 30 aristas?

Circuitos y Recorridos Eulerianos

Ejercicio 17. Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 18.

a. Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.

b. ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

Ejercicio 19. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6; b) K_8; c) K_{10}; d) K_{2n}, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 20. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 7 o demuestre que no existe.

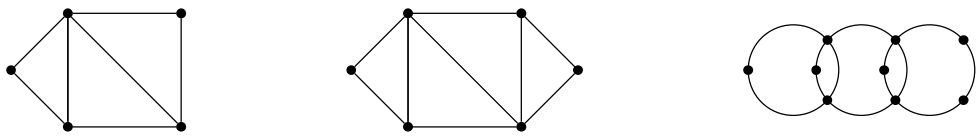


Figura 7