



Física Experimental 2



Práctica 4 - Circuitos RLC en régimen permanente.

1. Introducción

En esta práctica se estudiará el comportamiento de un circuito RLC en serie en régimen permanente. Además, esta práctica tiene como objetivo continuar trabajando con el osciloscopio, de forma de adquirir mayor fluidez en su uso y conocer otras funciones del equipo.

2. Fundamento teórico

2.1. Circuito RLC en régimen permanente.

Consideremos un circuito que consta de una fuente de voltaje sinusoidal, una resistencia R , un condensador C y un inductor L conectados en serie como el que se muestra en la figura 1.

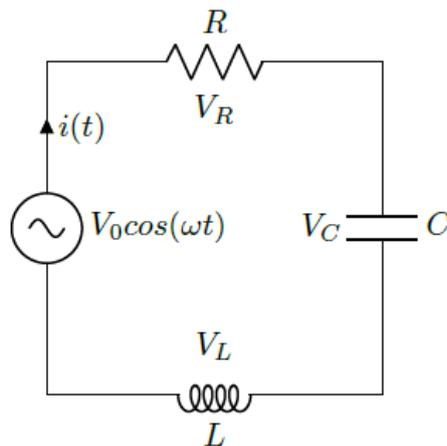


Figura 1: Circuito RLC serie con alimentación sinusoidal

La ecuación básica para este circuito es:

$$V_0 \cos \omega t = V_R + V_L + V_C = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad (1)$$

donde la corriente i y la carga eléctrica q mantienen sus definiciones usuales (i.e. $i = \frac{dq}{dt}$). En términos de la carga, esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden y describe un sistema disipativo sometido a oscilaciones forzadas.

Estamos interesados en estudiar su comportamiento en régimen permanente, por lo que usaremos el método fasorial para hallar la corriente $i(t)$. Definimos, otra vez, la carga y corriente en el plano complejo como $Q(t) = Q_0 e^{j\omega t}$ e $I(t) = I_0 e^{j\omega t}$ respectivamente, donde Q_0 e I_0 son números complejos (módulo y fase de la carga y la corriente, respectivamente). Indicaremos los módulos como $|Q_0| = q_0$ e $|I_0| = i_0$ respectivamente. Denominemos ϕ a la fase de la corriente en relación a la fuente de modo que $I_0 = i_0 e^{j\phi}$, en términos de fasores. Escribiendo las caídas de potencial para cada elemento del circuito, se pueden definir las reactancias del mismo:

$$V_R(t) = RI(t), \quad V_L(t) = L \frac{dI}{dt} = j\omega L I(t), \quad V_C(t) = \frac{1}{C} Q(t) = \frac{I(t)}{j\omega C}. \quad (2)$$

La reactancia inductiva será entonces $X_L = \omega L$ y la reactancia capacitiva $X_C = 1/\omega C$. De este modo vemos que el fasor $V_R = RI$ está en fase con la corriente. Mientras que $V_L = jX_L I$ se adelanta respecto a la corriente en $\pi/2$ y $V_C = -jX_C I$ se atrasa respecto a la corriente en $\pi/2$. Estos resultados pueden observarse en la figura 2.

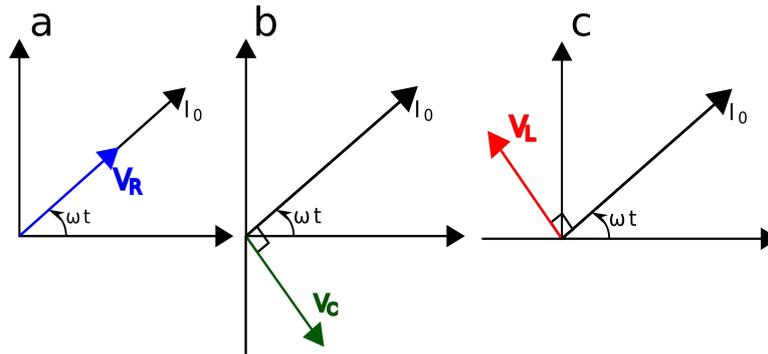


Figura 2: Diagrama fasorial para el fasor V_R (a), V_C (b) y V_L (c). En todos los casos se muestra la relación respecto al fasor corriente I_0 en la figura.

Incluiremos ahora el forzamiento para continuar con el análisis de nuestro sistema. Tomando el forzamiento como $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$, con V_0 real,

y reemplazando en la ec. (1), obtenemos la forma algebraica de la misma,

$$V_0 = R I_0 + j\omega L I_0 + \frac{j}{\omega C} I_0 = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_0 = [R + j(X_L - X_C)] I_0. \quad (3)$$

Resolviendo para la corriente, obtenemos

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{V_0}{R + j(X_L - X_C)} \equiv \frac{V_0}{Z}, \quad (4)$$

donde $Z = R + j(X_L - X_C)$ es la impedancia del circuito RLC serie.

Dado que $|I_0| e^{j\phi} = i_0 e^{j\phi}$, la corriente física es la parte real, $i(t) = \Re [I_0 e^{j\omega t}] = i_0 \cos(\omega t + \phi)$, donde el módulo de la corriente es

$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_0}{|Z|} \quad (5)$$

y el desfase (con respecto a la fuente) es

$$\phi = \text{Arctan} \left(\frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{X_C - X_L}{R} \right). \quad (6)$$

La corriente es máxima en la frecuencia de resonancia, donde se cumple que $X_L = X_C$ y decrece rápidamente a otras frecuencias. Esto sugiere el uso de este circuito como filtro pasabanda, ya que $V_R \propto i(t)$ resulta ser pequeño a frecuencias diferentes a la de resonancia. En resonancia se verifica entonces:

- 1) Desfase nulo entre la corriente y la fuente V_0 .
- 2) Amplitud máxima de la corriente y de V_R .
- 3) V_L y V_C son iguales y opuestos (tienen la misma amplitud y están desfasados 180 grados).

La frecuencia de resonancia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7)$$

y no depende de la resistencia del circuito.

2.2. Modelo de bobina real.

Una bobina real incluye, además de los efectos inductivos, efectos resistivos asociados a la resistencia del conductor con el que está hecha. Si además el bobinado tiene un núcleo de placas de hierro para aumentar su inductancia, hay efectos disipativos en el núcleo debido a las corrientes parásitas.

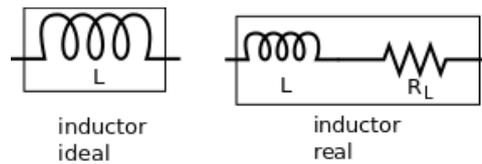


Figura 3: Modelo de un inductor con efectos disipativos.

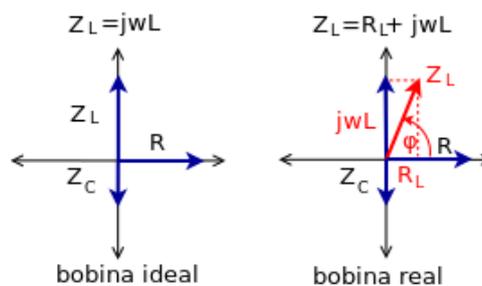


Figura 4: Impedancias del circuito con bobinado ideal y real.

La figura 3 muestra el modelo de un inductor real, que consiste en un inductor ideal de autoinductancia L y una resistencia en serie R_L . En el caso de bobinados con núcleo de aire o no conductor, esta resistencia es la resistencia del alambre de la bobina (por lo tanto, de unos pocos ohmios). En el caso de transformadores o bobinados con núcleo conductor, R_L incluye también los efectos disipativos de las corrientes parásitas en el núcleo. En términos prácticos R_L se suma a R y no cambia el tipo de circuito. En general se cumple que $R \gg R_L$ y esta puede ser despreciada.

Sin embargo, en esta práctica estamos interesados en medir R_L para un transformador y compararla con la resistencia interna del alambre del bobinado. La impedancia de un inductor ideal es simplemente la reactancia inductiva del bobinado, $Z_{L,ideal} = jX_L$ y está en fase con V_L como se muestra en la Fig. 4. Sin embargo, la impedancia del inductor real contiene el elemento resistivo

$$Z_L = R_L + j\omega L = R_L + jX_L \quad (8)$$

y ya no está en fase con V_L y tiene un desfase $\varphi < \pi/2$ con la corriente, como se indica en rojo en la Fig. 4. Midiendo la amplitud V_R en resonancia (cuando está en fase con V_0), podemos calcular R_L :

$$V_R = RI_0, \quad V_0 = (R + R_L)I_0$$

y eliminando I_0 obtenemos

$$R_L = \left(\frac{V_0}{V_R} - 1 \right) R \quad (\text{en resonancia}). \quad (9)$$

La resistencia total en el circuito es entonces $R_T = R + R_L = (V_0/V_R) R$.

2.3. Resonancia y factor de calidad.

En resonancia $X_L = X_C$, por lo que $V_L + V_C = 0$ y se cumple $V_0 = V_R = RI_0$. Es decir, la corriente está en fase con la fuente. Además, se alcanza la máxima corriente $i_{0,max} = V_0/R$ en el circuito. El efecto de resonancia es útil como filtro pasabanda. Por ejemplo, los circuitos de sintonía radial se basan en una resonancia para sintonizar (seleccionar una frecuencia) una estación entre varias que existen en el aire.

La calidad de la resonancia es un concepto importante. Se define el factor de calidad de una resonancia como

$$Q_0 = 2\pi \frac{\text{Potencia media almacenada en el circuito}}{\text{Potencia media disipada en el circuito}} = 2\pi \frac{\bar{P}_a}{\bar{P}_d} \quad (10)$$

Para obtener una expresión para Q_0 consideramos la energía almacenada E_a en el inductor y el capacitor en el instante t y tomamos su valor medio en un período T de la fuente para hallar la potencia media almacenada,

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CV_C^2 = \frac{1}{2}Li_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} \frac{i_0^2}{\omega^2 C} \sin^2(\omega t + \phi) \\ \bar{P}_a &= \frac{\bar{E}_a}{T} = \frac{\omega}{8\pi} \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) i_0^2. \end{aligned}$$

En forma similar, calculamos la potencia media disipada en un período, como:

$$P_d = V_R i(t) = Ri^2 = Ri_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) \Rightarrow \bar{P}_d = \frac{1}{2} Ri_0^2. \quad (11)$$

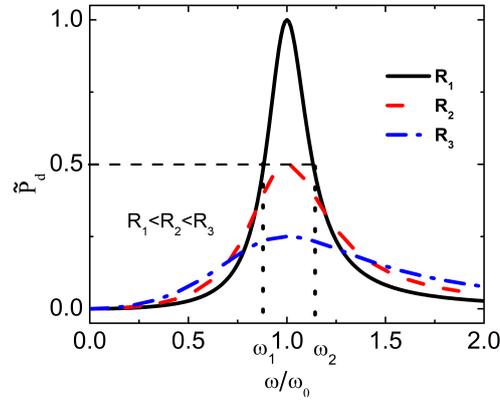


Figura 5: Bosquejo mostrando las curvas de respuesta (potencia media disipada) en frecuencia para varias resistencias diferentes. A menor R , mas angosto el pico de resonancia. El circuito funciona como un filtro pasabanda en torno a la frecuencia de resonancia.

Por lo que el factor de calidad, Ec. (10), se reduce a

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2} \times \frac{L + 1/\omega^2 C}{R} \quad (12)$$

Dado que la frecuencia de resonancia corresponde a Ec. (7), el factor de calidad se puede expresar como:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R}, \quad (13)$$

El factor de calidad es mayor, cuando mayor la inductancia L y menor la resistencia R (asociada al carácter disipativo). En la Fig. 5 mostramos cualitativamente la forma de la potencia disipada para diferentes valores de resistencia en el circuito.

El ancho bajo medio la curva de resonancia es $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = R/L$ y el factor de calidad, Ec. (13) se puede expresar como

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (14)$$

En un circuito RLC con resistencia pequeña, el factor Q_0 puede ser alto y el circuito tendrá una buena capacidad de resolver (y filtrar) frecuencias cercanas.

3. Actividades a realizar

3.1. Actividad experimental

Arme el circuito RLC serie y aliméntelo con el generador de funciones. Registre los valores de la resistencia y capacitancia utilizados.

1. Mida la amplitud de V_0 y asegúrese de no modificarla durante las mediciones.
2. Encuentre y mida la frecuencia de resonancia y su incertidumbre, usando el osciloscopio (recuerde la condiciones que verifica V_R en resonancia).
3. Calcular la inductancia L y su incertidumbre.
4. Estime el valor de R_L con su incertidumbre midiendo la amplitud de V_R en resonancia y calcule la resistencia total del circuito $R_T = R + R_L$ y su incertidumbre.
5. Mida V_R y el desfase entre V_R y V_0 en función de la frecuencia del generador.
6. A partir de las medidas realizadas:
 - a) Construya una gráfica de la potencia disipada por la resistencia R vs. la frecuencia (se recuerda $P = V_R^2/R$) y del desfase en función de la frecuencia. Poner barras de incertidumbres a los puntos experimentales en la gráfica.
Superponer a las curvas de los datos experimentales las curvas teóricas esperadas.
 - b) Estimar el factor de calidad del circuito de dos formas: a partir de la gráfica realizada de la potencia disipada ($Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$), y a partir de los valores medidos de L , R y ω_0 ($Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R}$). En este último caso, el valor de R tiene que incluir el valor de la resistencia del inductor, al no ser despreciable. Para estimar el factor de calidad a partir de la gráfica de la potencia, se sugiere realizar una interpolación de los datos obtenidos.

Criterio de elección de las frecuencias: Se sugiere realizar medidas para por lo menos 10 frecuencias mayores y 10 menores a la frecuencia de resonancia. Piensen en que región de frecuencias es más importante tomar más medidas.

4. Pauta de corrección

- **Presentación general y valoración general - 1 punto** Incluye: organización, contenido general del reporte, redacción y ortografía. Las graficas deben estar correctamente presentadas, con pie de figura y citadas en el texto.
- **Introducción - 1 punto** Se describen brevemente los objetivos. Deben explicarse únicamente los conceptos y ecuaciones más importantes que sean necesarias para el desarrollo de la práctica. Mencionar que hipótesis se realizan, rango de validez de las aproximaciones, etc.
- **Metodología - 1.5 puntos** Bien explicada, con esquema del dispositivo (pueden colocar fotos si aporta información relevante) y consideraciones a tener en cuenta durante la práctica. Es importante relacionar con las hipótesis del modelo teórico, así como dar los detalles importantes relativos a como se deben armar el dispositivo y tomar las medidas para cumplir con estas hipótesis. Indicar claramente las magnitudes medidas y su correspondiente incertidumbre.
- **Tratamiento de datos - Gráfica potencia disipada y desfase - 2.5 puntos** Se evaluará la calidad de los datos experimentales de las medidas del voltaje en los bornes de la resistencia V_R y del desfase de V_R respecto a V_0 . Gráficar los valores medidos de la potencia disipada (a partir de la medida de la amplitud V_R) y del desfase en función de la frecuencia. Superponer a los datos experimentales las curvas esperadas teóricamente. Representar las barras de incertidumbre en las gráficas.
- **Tratamiento de datos - Medida frecuencia de resonancia, L y R_L - 2 puntos.** Explicar como se encontró la frecuencia de resonancia y presentar su valor con incertidumbre y cifras significativas correctas. Determinar los valores de L y R_L con incertidumbres, detallando los cálculos.
- **Tratamiento de datos - Cálculo del factor de calidad, Q - 1 punto.** Se espera el calculo de Q por los dos métodos, con los resultados bien expresados y una pequeña discusión de lo obtenido.
- **Conclusiones - 1 punto** Detalladas y explicadas, ligadas a los objetivos de la práctica y vinculando con el modelo y las hipótesis realizadas.
- Anexo con las tablas con los datos experimentales relevados, incluyendo sus incertidumbres y unidades.

Apéndice: Figuras de Lissajous

El osciloscopio, además de funcionar en la modalidad tiempo/voltaje que permite visualizar voltajes en función del tiempo, puede funcionar en la modalidad X/Y. En este caso en el eje vertical del osciloscopio se representa la señal que entra en el canal 1 y en el eje horizontal la señal que entra en el canal 2, eliminando la variable tiempo. De esta forma en el osciloscopio aparecen las figuras de Lissajous, que entre otras cosas permiten medir de forma precisa la diferencia de fase entre las dos señales que ingresan al osciloscopio.

Consideremos dos señales sinusoidales $x(t)$ e $y(t)$ de igual frecuencia y con un desfase φ

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega t) \\y(t) &= y_0 \cos(\omega t + \varphi)\end{aligned}\tag{15}$$

Eliminando el tiempo de estas ecuaciones se obtiene la ecuación de una elipse rotada:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2\frac{x}{x_0}\frac{y}{y_0}\cos\varphi - \sin^2\varphi = 0.\tag{16}$$

la cual se muestra en la Fig. 6. Cuando no hay desfase ($\varphi = 0$), la elipse se convierte en la recta $y = (y_0/x_0)x$. Cuando $\varphi = \pi/2$, los ejes de la elipse coinciden con los ejes X e Y. Si además se verifica que ambas amplitudes son iguales ($x_0 = y_0$), la elipse se convierte en una circunferencia.

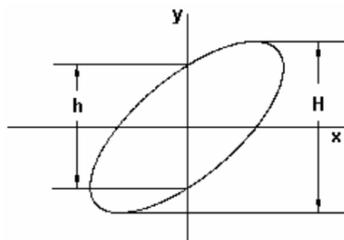


Figura 6: Figuras de Lissajous.

La Ec. (16) muestra que la elipse corta el eje Y ($x = 0$) en $y = \pm y_0 \sin\varphi$. Por tanto, la magnitud h indicada en la Fig. 6 está dada por $h = 2y_0 \sin\varphi$. Por otro lado, $H = 2y_0$ y resulta

$$\varphi = \text{Arcsin}\left(\frac{h}{H}\right).\tag{17}$$

Es importante que la elipse esté bien centrada en el punto $x = y = 0$. Este es un método práctico adecuado para medir amplitudes y desfases entre dos señales de la misma frecuencia.

5. Bibliografía

R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane – Física Vol. 2. Tercera edición 1993, cuarta reimpresión 1996.