Veamos que $\int \varphi \, dm_2$ no depende de la representación de φ.

Proposición: Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función simple y $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{1}_{E_j}$, donde $E_1, \ldots, E_n$ son conjuntos medibles de medida finita y $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces

$$\int \varphi \, dm_2 = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot m_2(E_j).$$

• **Demostración**: Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ el conjunto de valores de φ y $A_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\})$. Como los E_i son disjuntos dos a dos, se tiene que

$$A_i = \bigcup_{j_i} E_{j_i}$$

donde los $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ son aquellos índices para los cuales $\varphi(x) = \alpha_i$ donde $x \in E_{j_i}$. (de donde se tiene además que $a_{j_i} = \alpha_i$)

Así,

$$\alpha_i \cdot m_2(A_i) = \alpha_i \left(\sum_{j_i} m_2(E_{j_i}) \right) \quad (\text{ya que } m_2 \text{ es aditiva})$$

$$= \sum_{j_i} \alpha_i \cdot m_2(E_{j_i})$$

$$= \sum_{j_i} a_{j_i} \cdot m_2(E_{j_i})$$

$$\int \varphi \, dm_2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, m_2(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j_i} a_{j_i} \, m_2(E_{j_i})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \, m_2(E_j). \quad \blacksquare$$

Propiedades de la integral de Lebesgue de funciones simples: Sean $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones simples que se anulan fuera de un conjunto con medida finita. Las siguientes propiedades se cumplen:

1) $\int a \cdot \varphi = a \int \varphi$, $\forall a \in \mathbb{R}$ (homogeneidad).

2) $\int (\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$ (aditividad).

3) Si $\varphi \geq \psi$ c.t.p., entonces $\int \varphi \geq \int \psi$. (monotonía).

• **Demostración:**

1) $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ (rep. canónica)

Si $a = 0$ entonces $a \cdot \varphi = 0$ y

$\int a \cdot \varphi = \int 0 = \int \mathbb{1}_{\emptyset} = m_{\lambda}(\emptyset) = 0$,

$a \cdot \int \varphi = 0$.

∴ En este caso la igualdad coincide.

Si $a \neq 0$ entonces $\sum_{i=1}^{m} (a \cdot \alpha_i) \mathbb{1}_{A_i}$ es la rep. canónica de $a \cdot \varphi$. Luego,

$$\int a \cdot \varphi = \sum_{i=1}^{m} (a \cdot \alpha_i) m_{\lambda}(A_i) = a \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} m_{\lambda}(A_i) \right)$$
$$= a \int \varphi.$$

2) Sean $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ y $\psi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$, tomando representaciones canónicas. Sean a su vez A_0 y B_0 los conjuntos donde φ y ψ valen cero, respectivamente. Luego,

$$A_i = A_i \cap \mathbb{R} = A_i \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n} B_j \right) = \bigcup_{j=0}^{n} (A_i \cap B_j) \quad \text{(unión disjunta)}$$

Así, $\mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$. De manera similar,

$$\mathbb{1}_{B_j} = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

De lo anterior se sigue que:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \right) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \quad (\text{se toma } \alpha_0 = 0)$$

$$\int \varphi = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \alpha_i m_{\mathcal{L}}(A_i \cap B_j),$$ ya que los $A_i \cap B_j$ son disjuntos dos-a-dos.

$$\psi = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \quad (\text{se toma } \beta_0 = 0)$$

$$\int \psi = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \beta_j m_{\mathcal{L}}(A_i \cap B_j).$$

$$\int \varphi + \int \psi = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (\alpha_i + \beta_j) m_{\mathcal{L}}(A_i \cap B_j)$$

$$= \int (\varphi + \psi)$$ ya que $\varphi + \psi = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$ donde los $A_i \cap B_j$ son disjuntos dos-a-dos.

3) Sea $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \varphi(x) < \psi(x)\}$, medible y $m_\lambda(D) = 0$.

Considere la función simple $\varphi - \psi$ y sea

$$\varphi - \psi = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k \mathbb{1}_{C_k}$$

su representación canónica. Luego,

$$\varphi - \psi = (\varphi - \psi)(\mathbb{1}_{\mathbb{R}-D} + \mathbb{1}_D) = (\varphi - \psi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}-D} + (\varphi - \psi)\mathbb{1}_D$$

donde cada sumando es una función simple. Así, por las partes 1) y 2) se tiene:

$$\int (\varphi - \psi) = \int \left((\varphi - \psi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}-D} + (\varphi - \psi)\mathbb{1}_D \right)$$

$$\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}-D} + \int (\varphi - \psi)\mathbb{1}_D ,$$

donde $\int (\varphi - \psi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}-D} \geq 0$ y

$$\int (\varphi - \psi)\mathbb{1}_D = \int \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_k \mathbb{1}_{C_k \cap D} \right) \underset{\downarrow}{=} \sum_{k=1}^{l} \gamma_k m_\lambda(C_k \cap D)$$

los $C_k \cap D$ son disjuntos dos-a-dos

Como $m_\lambda(D) = 0$, se tiene que $m_\lambda(C_k \cap D) = 0 \;\forall k = 1, \dots, l$.

Luego, $\int (\varphi - \psi)\mathbb{1}_D = 0$. Por lo tanto,

$$\int \varphi - \int \psi = \int (\varphi - \psi)\mathbb{1}_{\mathbb{R}-D} \geq 0$$

$\int \varphi \geq \int \psi$ (se puede despejar ya que $\int \psi$ es finito por ser ψ simple y nula fuera de un subconjunto de $\mathbb{R}$ con medida finita)

Lo siguiente es inmediato a partir de las propiedades demostradas.

Corolario: Sea $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{1}_{E_j}$ donde los E_j tienen medida finita (y no necesariamente disjuntos dos a dos). Entonces,

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j m_{\mathcal{L}}(E_j).$$

Dada una función medible y acotada $f: E \to \mathbb{R}$, considere los siguientes valores en $\mathbb{R}$:

$$\inf \left\{ \int_E \psi \;/\; \psi \geq f \text{ y } \psi \text{ es simple} \right\} \text{ y}$$

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \;/\; \varphi \leq f \text{ y } \varphi \text{ es simple} \right\}$$

(se debe asumir que $m_{\mathcal{L}}(E) < \infty$). Se puede demostrar la igualdad entre las igualdades anteriores.

Proposición (integral de Lebesgue de funciones medibles acotadas): Sea $f: E \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada con $m_{\mathcal{L}}(E) < \infty$. Entonces

$$\inf \left\{ \int_E \psi \;/\; \psi \text{ simple y } \psi \geq f \right\} = \sup \left\{ \int_E \varphi \;/\; \varphi \text{ simple y } \varphi \leq f \right\}.$$

Al valor común, denotado por $\int_E f$ $\left(\text{ó } \int_E f(x)\, dm_{\mathcal{L}} \right)$, se le conoce como integral de Lebesgue de f sobre E.

• **Demostración:** Siguiendo la idea de la demostración del teorema de aproximación, se dividirá apropiadamente el codominio de f. Recordemos que al ser f acotada, existe $M>0$ tal que

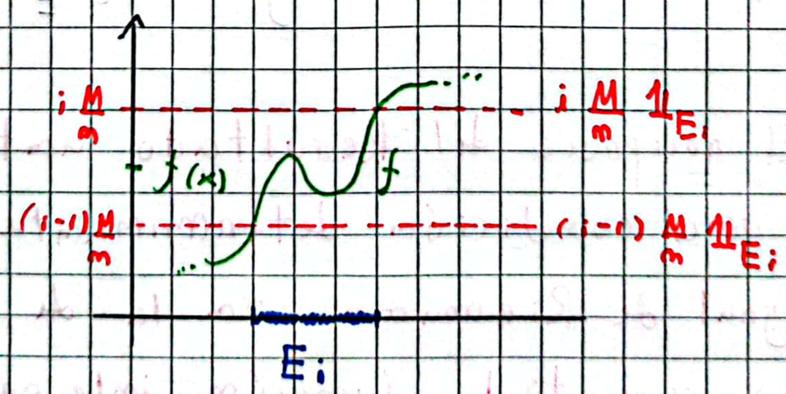
$$-M \le f(x) \le M, \quad \forall x \in E.$$

Dado $n \in \{1, 2, \dots\}$, $\mathrm{Im}(f)$ está contenido en una unión disjunta de $2n+1$ intervalos semi-abiertos de longitud M/n. Más precisamente, para cada $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, existe $-n \le i \le n$ tal que

$$f(x) \in \left((i-1)\frac{M}{n}, \, i\frac{M}{n}\right].$$

Vemos entonces que $E = \bigcup_{i=-n}^{n} E_i$ donde $E_i = f^{-1}\left(\left((i-1)\frac{M}{n}, i\frac{M}{n}\right]\right)$. Note que esta unión es disjunta y que cada E_i es medible. Además,

$$m_J(E) = \sum_{i=-n}^{n} m_J(E_k).$$



Proponemos entonces $\psi_n, \varphi_n : E \to \mathbb{R}$ como

$$\psi_n(x) = \frac{M}{n}\sum_{i=-n}^{n} i\,\mathbb{1}_{E_i}(x) \quad y \quad \varphi_n(x) = \frac{M}{n}\sum_{i=-n}^{n} (i-1)\,\mathbb{1}_{E_i}(x).$$

Notamos claramente que $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$, $\forall x \in E$.

Por otro lado

$$\int_E \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{i=-n}^{n} i \, m_L(E_i) \geq \inf\left\{ \int_E \psi \;/\; \psi \text{ simple y } \psi \geq f \right\},$$

y

$$\int_E \varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{i=-n}^{n} (i-1) m_L(E_i) \leq \sup\left\{ \int_E \varphi \;/\; \varphi \text{ simple y } \varphi \leq f \right\}$$

Más aún, note que

$$0 \leq \inf\left\{ \int_E \psi \;/\; \psi \text{ simple y } \psi \geq f \right\} - \sup\left\{ \int_E \varphi \;/\; \varphi \text{ simple y } \varphi \leq f \right\}$$

$$\leq \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{i=-n}^{n} i \, m_L(E_i) + \frac{M}{n} \sum_{i=-n}^{n} (1-i) m_L(E_i)$$

$$= \frac{M}{n} \sum_{i=-n}^{n} m_L(E_i) = \frac{M}{n} m_L(E), \; \forall n.$$

Al ser n arbitrario, se tiene que

$$\inf\left\{ \int_E \psi \;/\; \psi \text{ simple y } \psi \geq f \right\} = \sup\left\{ \int_E \varphi \;/\; \varphi \text{ simple y } \varphi \leq f \right\}$$

$\blacksquare$

<u>Observación</u>: El recíproco del resultado anterior es cierto, y es una condición determinante para relacionar la integral de Riemann con la de Lebesgue. Es decir, veremos que toda función integrable Riemann es medible y que para tales funciones ambas integrales coinciden.

Proposición: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible y $f: E \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que

$$\inf\left\{\int_E \psi \,/\, \psi \text{ simple y } \psi \geq f\right\} = \sup\left\{\int_E \varphi \,/\, \varphi \text{ simple y } \varphi \leq f\right\}.$$

Entonces f es medible.

• **Demostración:** A partir de la hipótesis, notamos que para cada $n \in \{1, 2, \dots\}$ existen funciones simples $\psi_n, \varphi_n : E \to \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x), \quad \forall x \in E$$

y

$$\int_E \psi_n - \int_E \varphi_n < \frac{1}{n}.$$

Tenemos así dos sucesiones de funciones $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por propiedades de las funciones medibles, las funciones dadas por

$$\psi^* = \inf\{\psi_n / n = 1, 2, \dots\} \text{ y } \varphi^* = \sup\{\varphi_n / n = 1, 2, \dots\}$$

son medibles.

La idea a partir de ahora es probar que $\varphi^* = f = \psi^*$ en casi todas partes. Como consecuencia, se tendrá que f es medible.

Vemos primero que $\varphi^*(x) \leq f(x) \leq \psi^*(x)$ $\forall x \in E$. Entonces, $\varphi^* = f = \psi^*$ c.t.p. si el conjunto

$$D = \{x / \varphi^*(x) < \psi^*(x)\}$$

tiene medida cero (note que $D = (\psi^* - \varphi^*)^{-1}((0, +\infty))$ es medible).

Note que si $x \in D$, existe $m \in \{1, 2, \dots\}$ tal que $\psi^*(x) - \varphi^*(x) > \frac{1}{m}$. Luego,

$$D = \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m$$

donde

$$D_m = \left\{ x \in E \,/\, \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{m} \right\}.$$

Veamos que $m_L(D_m) = 0$, $\forall m \in \{1, 2, \dots\}$. En efecto,

$$D_m \subseteq \left\{ x \in E \,/\, \varphi_n(x) < \psi_n(x) - \frac{1}{m} \right\}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Es decir, $\frac{1}{m} < \psi_n(x) - \varphi_n(x)$, $\forall x \in D_m$. Al integrar obtenemos:

$$\frac{1}{m} \int \mathbb{1}_{D_m} < \int (\psi_n - \varphi_n) \mathbb{1}_{D_m} \underset{\uparrow}{\leq} \int_E (\psi_n - \varphi_n) < \frac{1}{n}$$

ya que $\psi_n - \varphi_n \geq 0$

$$\frac{1}{m} \cdot m_L(D_m) < \frac{1}{n}$$

$$0 \leq m_L(D_m) < \frac{m}{n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, $m_L(D_m) = 0$, $\forall m = 1, 2, \dots$

Entonces, $m_L(D) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m_L(D_m) = 0$ y así $m_L(D) = 0$.

Se concluye que $\varphi^* = f = \psi^*$ c.t.p., lo cual implica que f es medible, ya que φ^* (o ψ^*) lo es. ∎

Corolario: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable Riemann en $[a,b]$. Entonces, f es medible y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dm_1 .$$

· **Demostración**: Recordemos la definición de $\int_a^b f(x)\,dx$. Dada una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, se define la suma superior e inferior de f respecto a dicha partición como

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i \quad y \quad s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

donde $M_i = \sup\{f(x) \,/\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y
$m_i = \inf\{f(x) \,/\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Al ser f integrable Riemann, se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

donde $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf S$ y $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup s$.

Note que tanto S como s pueden reescribirse como

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i\, m_1([x_{i-1}, x_i)) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} M_i \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i)} \quad y$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i\, m_1([x_{i-1}, x_i)) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i)} .$$

Como las $\sum_{i=1}^{n} M_i \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i)}$ son un tipo particular de funciones simples tales que $\sum_{i=1}^{m} M_i \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i)} \geq f$, se tiene que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf S \geq \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \;/\; \psi \text{ simple y } \psi \geq f \right\}.$$

Análogamente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup s \leq \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;/\; \varphi \text{ simple y } \varphi \leq f \right\}.$$

Entonces,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;/\; \begin{array}{l} \varphi \text{ simple} \\ \text{y } \varphi \leq f \end{array} \right\} \leq \inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \;/\; \begin{array}{l} \psi \text{ simple} \\ \text{y } \psi \geq f \end{array} \right\}$$

$$\leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Como $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$, se tiene que

$$\inf \left\{ \int_{[a,b]} \psi \;/\; \begin{array}{l} \psi \text{ simple} \\ \text{y } \psi \geq f \end{array} \right\} = \sup \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \;/\; \begin{array}{l} \varphi \text{ simple} \\ \text{y } \varphi \leq f \end{array} \right\},$$

lo cual implica que f es medible en $[a, b]$ y que

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dm_1 = \int_a^b f(x)\, dx. \quad \blacksquare$$

Observación: No toda función integrable Lebesgue es integrable Riemann. Un ejemplo de tal función viene dado por $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Propiedades de la integral de Lebesgue de funciones medibles acotadas y el Teorema de la convergencia dominada

La idea ahora es generalizar las propiedades de la integral de Lebesgue de funciones simples a la integral de Lebesgue de funciones medibles acotadas.

Propiedades de la integral de Lebesgue de funciones medibles acotadas: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible, $m_\ell(E) <$

Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1) **Aditividad:** Si $f, g : E \to \mathbb{R}$ son funciones medibles y acotadas, entonces

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

2) **Homogeneidad:** Si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible y acotada y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_E (a \cdot f) = a \cdot \int_E f.$$

3) Si $f, g : E \to \mathbb{R}$ son funciones medibles y acotadas, y $f = g$ c.t.p., entonces $\int_E f = \int_E g$.

4) <u>Monotonía</u>: Si $f, g: E \to \mathbb{R}$ son funciones medibles y acotadas tales que $f \leq g$ c.t.p., entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

En particular, $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$

5) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes y $f: E \to \mathbb{R}$ es una función medible y acotada tal que $a \leq f(x) < b$ para todo $x \in E$, entonces

$$a \cdot m_L(E) \leq \int_E f \leq b \cdot m_L(E).$$

6) <u>Aditividad en el dominio de integración</u>: Si $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ son conjuntos medibles, disjuntos y con medida finita, y $f: E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f.$$

• <u>Demostración</u>:

1) $$\int_E (f+g) = \inf\left\{ \int_E \psi \;\middle/\; \begin{array}{l} \psi \text{ es simple} \\ \text{y } f+g \leq \psi \end{array} \right\}$$

Sean $\psi_1, \psi_2: E \to \mathbb{R}$ funciones simples tales que $f \leq \psi_1$ y $g \leq \psi_2$. Entonces $\psi_1 + \psi_2$ es simple y $f + g \leq \psi_1 + \psi_2$. Luego:

$$\int_E (f+g) \leq \int_E (\psi_1+\psi_2) = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2 .$$

por la definición de $\int_E (f+g)$

$$\int_E (f+g) - \int_E \psi_2 \leq \int_E \psi_1, \quad \forall \psi_1 : E \to \mathbb{R} \text{ simple tal que } f \leq \psi_1 .$$

Por definición de ínfimo, se tiene que

$$\int_E (f+g) - \int_E \psi_2 \leq \int_E f$$

$$\int_E (f+g) - \int_E f \leq \int_E \psi_2 .$$

A partir de la desigualdad anterior, se obtiene de manera similar que

$$\int_E (f+g) - \int_E f \leq \int_E g$$

$$\int_E (f+g) \leq \int_E f + \int_E g .$$

La desigualdad contraria se demuestra de manera similar usando la definición de $\int_E (f+g)$, $\int_E f$ y $\int_E g$ por medio de supremos.

2) Si $a=0$, es claro que $\int_E 0 \cdot f = 0 \cdot \int_E f$

· Si $a>0$, entonces

$$\int_E (a\cdot f) = \inf\left\{ \int_E \psi \;/\; \begin{array}{l}\psi \text{ es simple}\\ \text{y } a\cdot f \leq \psi\end{array}\right\}$$

Note que si $\psi : E \to \mathbb{R}$ es una función simple tal que $a\cdot f \leq \psi$, podemos escribir $\psi = a\tilde{\psi}$ donde $\tilde{\psi} : E \to \mathbb{R}$ es simple y $f \leq \tilde{\psi}$ (ya que $a>0$).

Luego,

$$\int_E (a\cdot f) = \inf\left\{ \int_E a\cdot\tilde{\psi} \;/\; \begin{array}{l}\tilde{\psi} \text{ simple}\\ \text{y } f \leq \tilde{\psi}\end{array}\right\}$$

$$= \inf\left\{ a\cdot\int_E \tilde{\psi} \;/\; \begin{array}{l}\tilde{\psi} \text{ simple}\\ \text{y } f \leq \tilde{\psi}\end{array}\right\}$$

$$\underset{a>0}{=} a\cdot \inf\left\{ \int_E \tilde{\psi} \;/\; \begin{array}{l}\tilde{\psi} \text{ simple}\\ \text{y } f \leq \tilde{\psi}\end{array}\right\} = a\cdot\int_E f.$$

· Si $a<0$ entonces, por un argumento similar, se tiene que

$$\int_E (a\cdot f) = \inf\left\{ \int_E \psi \;/\; \begin{array}{l}\psi \text{ es simple}\\ \text{y } a\cdot f \leq \psi\end{array}\right\}$$

$$= \inf\left\{ \int_E a\cdot\tilde{\psi} \;/\; \begin{array}{l}\tilde{\psi} \text{ es simple}\\ \text{y } f \geq \tilde{\psi}\end{array}\right\}$$

$$= \inf\left\{ a\int_E \tilde{\psi} \;/\; \begin{array}{l}\tilde{\psi} \text{ es simple}\\ \text{y } f \geq \tilde{\psi}\end{array}\right\}$$

$$\underset{a<0}{=} a\cdot \sup\left\{ \int_E \tilde{\psi} \;/\; \begin{array}{l}\tilde{\psi} \text{ es simple}\\ \text{y } f \geq \tilde{\psi}\end{array}\right\} = a\cdot\int_E f.$$

3) Considere la función $f-g$ (medible y acotada). 32

$f-g=0$ c.t.p.

Sea $\psi: E \to \mathbb{R}$ una función simple tal que $\psi \geq f-g$. Luego, $\psi \geq 0$ c.t.p., y por la propiedad de monotonía de la integral de Lebesgue de funciones simples, se tiene que

$$\int_E \psi \geq 0.$$

Por definición de ínfimo, nos queda que

$$\int_E f-g \geq 0.$$ (Hasta esta parte del argumento, y usando las propiedades 1) y 2), se tiene 4

De manera similar, se tiene que

$$\int_E f-g \leq 0.$$

Por lo tanto, $\int_E (f-g) = 0$, es decir, $\int_E f = \int_E g$ (por las propiedades 1) y 2)).

El resto de la afirmación se sigue de la desigualdad

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

5) $a \cdot \mathbb{1}_E \leq f \leq b \cdot \mathbb{1}_E$, y así por la propiedad de monotonía y la definición de integral de funciones simples, se tiene que

$$a \cdot m_1(E) = \int_E a \cdot \mathbb{1}_E \leq \int_E f \leq \int_E b \cdot \mathbb{1}_E = b \cdot m_1(E)$$

6) $$\int_{A\cup B} f = \int_{A\cup B} f\cdot \mathbb{1}_{A\cup B} = \int_{A\cup B} f\cdot(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \quad (\text{ya que } A\cap B = \emptyset)$$

$$= \int_{A\cup B} (f\cdot \mathbb{1}_A + f\cdot \mathbb{1}_B) = \int_{A\cup B} f\cdot \mathbb{1}_A + \int_{A\cup B} f\cdot \mathbb{1}_B \quad (\text{prop. } 1))$$

$$= \int_A f + \int_B f. \qquad \blacksquare$$

Además de las propiedades algebraicas de la integral probadas anteriormente, es posible calcular $\int_E f$ mediante aproximaciones de f por sucesiones de funciones. La primera herramienta que tenemos en este sentido es el teorema de la convergencia dominada.

<u>Teorema de la convergencia dominada</u>: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible de medida finita y $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ una sucesión de funciones medibles tales que existe $M > 0$ para el cual $|f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in E$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, entonces

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n .$$

· <u>Demostración</u>: Lo primero a notar es que f es medible por ser el límite puntual de funciones medibles (ver propiedades). Además,

$-M \leq f_n(x) \leq M \Rightarrow -M \leq \lim f_n(x) \leq M, \ \forall x \in E$

Así, f es también acotada.

Para probar el límite para integrales, usaremos el siguiente resultado (sin demostración):

__Tercer Principio de Littlewood__: Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ y un conjunto medible $A \subseteq E$ con $m_1(A) < \varepsilon/4M$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2m_1(E) \quad \forall x \in E - A.$$

En otras palabras, en $E - A$ la convergencia $f_n \to f$ es uniforme.

Por propiedades de la integral de Lebesgue para funciones medibles y acotadas, se tiene que

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_n - f) \right| \leq \int_E |f_n - f|.$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, sean $A \subseteq E$ y $N \in \mathbb{N}$ dados por el Principio de Littlewood. Si $n \geq N$, se tiene que

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| \leq \int_E |f_n - f| = \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f| \quad \text{(prop de aditividad)}$$

$$\circledast \int_{E-A} |f_n - f| < \int_{E-A} \varepsilon/2m_1(E) = \frac{\varepsilon}{2m_1(E)} m_1(E-A) \leq \varepsilon/2$$

$\hookrightarrow m_1(E-A) \leq m(E)$

$\circledast\circledast$ En A, $|f_n - f| \leq 2M$ y así

$$\int_A |f_n - f| \leq 2M\, m_1(A) < \varepsilon/2.$$

$\hookrightarrow m_1(A) < \varepsilon/4M$

Combinando (*) y (**) se tiene que

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \leq \int_{E-A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall n \geq N$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$. ∎