Práctico 14

integración de funciones medibles no negativas

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa, medible e integrable tal que $\int f = 0$. Demuestre que $f = 0$ en casi todas partes.

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa, medible e integrable. Demuestre que la función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$
es continua en $\mathbb{R}$.

   Sugerencia: Utilice el Teorema de la Convergencia Monótona y construya sucesiones que convergen a x por la izquierda y por la derecha.

3. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que converge puntualmente a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y tal que $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que
$$\int f = \lim \int f_n.$$

   Sugerencia: Utilice el Lema de Fatou, y tenga en cuenta que $\lim \int f_n$ existe si, y solamente si, $\liminf \int f_n = \limsup \int f_n$

4. Demuestre que puede darse una desigualdad estricta en el enunciado del Lema de Fatou.

   Sugerencia: Considere la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq x < n+1, \\ 0 & \text{si } x < n \text{ o } x \geq n+1. \end{cases}$

5. Muestre que el Teorema de la Convergencia Monótona puede no ser cierto para sucesiones decrecientes de funciones medibles no negativas.

   Sugerencia: Considere la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n, \\ 1 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$

6. Considere las sucesiones (y grafíquelas) $\{f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por
$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} e^{-\frac{x^2}{2n}} \quad \text{y} \quad g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}}.$$

   (a) Determine si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen en casi todas partes y, en caso afirmativo, encuentre
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x).$$

   (b) Determine si $\int f_n \to \int f$ y $\int g_n \to \int g$.

   Sugerencia: Puede ser útil la igualdad $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$.