PRÁCTICO 9

Grafos I: Caminos, conexidad, subgrafos (Secciones 11.1 y 11.2)

Ejercicio 1. Para el grafo de la Figura 2(ii), determinar:

a. Un camino abierto que no sea un recorrido.

b. Un recorrido que no sea camino simple.

c. Un camino simple de b a d de longitud 3.

d. Un camino cerrado que no sea un circuito.

e. Un circuito que no sea un ciclo.

f. Todos los ciclos que incluyen a b.

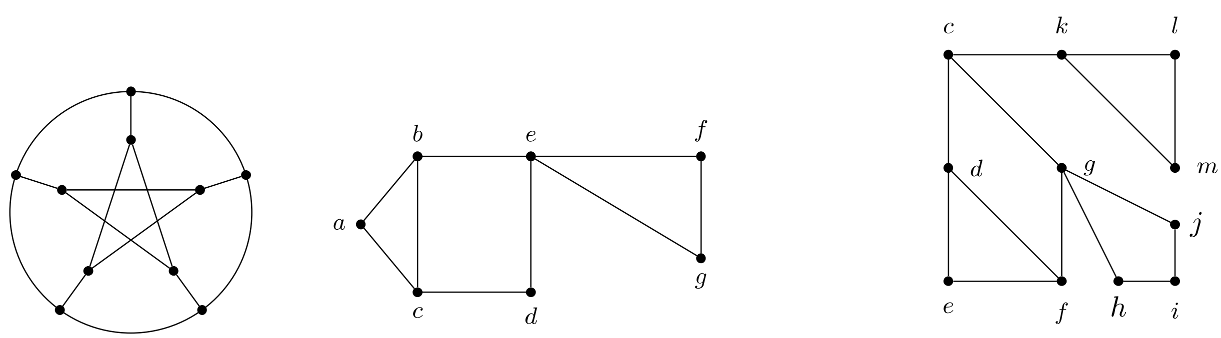
g. Todos los caminos simples de b a f.

Ejercicio 2.

a. ¿Cuál es la distancia entre el vértice d y los demás vértices del grafo de la Figura 2(iii)?

b. Hallar el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura 2(i)).

c. ¿Cuántos caminos simples tienen P_n y $K_{1,n}$?



(i) Grafo de Petersen (ii) (iii)

Figura 2

Ejercicio 3. Sean x e y dos vértices adyacentes de C_{20}. ¿Cuántos caminos de largo 11 empiezan en x y terminan en y?

Ejercicio 4. ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 5. Hallar el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_n sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 6. Para cada natural n tal que $n \geq 3$ se define el grafo n-rueda, y se denota W_n, como el grafo que se obtiene de C_n tras agregar un vértice que es adyacente a cada uno de los vértices de C_n. La Figura 3 ilustra a los grafos W_3, W_4 y W_5.

a. ¿Cuántas aristas tiene W_n?

b. ¿Cuántos 3-ciclos tiene W_3? ¿y W_4?

c. ¿Cuántos 4-ciclos tienen W_3, W_4 y W_5?

d. Ídem para 5-ciclos.

e. Ídem para 6-ciclos.

f. ¿Cuántos k-ciclos tiene W_n?

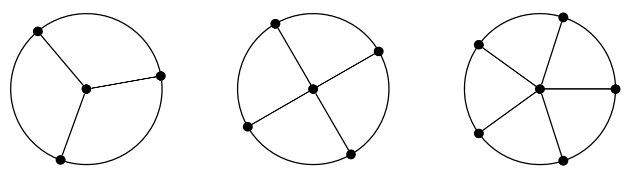


Figura 3

Ejercicio 7. Sea G un grafo conexo. Demostrar que si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos caminos simples en G cuya longitud es la máxima posible, entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen un vértice en común.

Ejercicio 8. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{1, 2, \ldots, 15\}$ tal que el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 9. Dibujar un grafo G que tenga tres vértices u, v y w tales que

$$\kappa(G - u) = \kappa(G), \qquad \kappa(G - v) > \kappa(G), \qquad \kappa(G - w) < \kappa(G).$$

Ejercicio 10. Un hombre desea cruzar a un perro, una oveja y una bolsa de repollos al otro lado del río utilizando una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos. Una secuencia de viajes se dice admisible si no se repite la misma configuración luego de uno o de dos viajes de ida y vuelta.

a. Indicar una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo.

b. Encontrar una secuencia de viajes admisibles que cumpla el objetivo usando exactamente 9 viajes de ida y vuelta y un viaje solo de ida para terminar. ¿Y si cambiamos 9 viajes de ida y vuelta por 10 viajes de ida y vuelta es posible lograr el objetivo?

Sugerencia: asociar a cada configuración factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un viaje de ida y vuelta, o un viaje solo de ida en el último paso.

Ejercicio 11. Sean G, G_1 y G_2 los grafos que se ilustran en la Figura 4.

a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
b. Mostrar que los subgrafos G_1 y G_2 son subgrafos inducidos de G.
c. Dibujar el subgrafo de G inducido por $\{b, c, d, f, i, j\}$.
d. Dibujar el grafo $G - \{e_1, e_2\}$, donde $e_1 = \{a, c\}$ y $e_2 = \{a, d\}$.
e. Dibujar un subgrafo de G que no sea inducido.
f. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G?
g. ¿Cuántos subgrafos recubridores conexos tiene G?

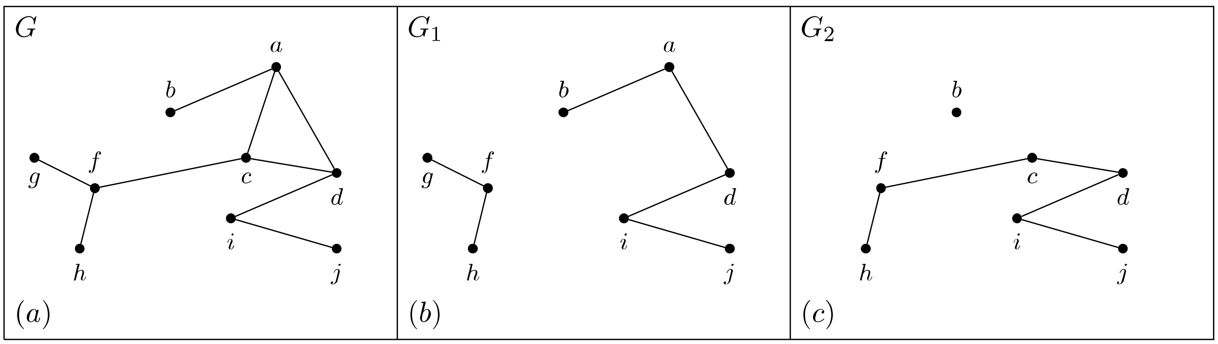


Figura 4

Ejercicio 12. El hipercubo de dimensión n, que denotamos H_n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas. A modo de ejemplo, en el grafo H_3 el vértices $(0, 0, 0)$ es adyacente a $(1, 0, 0)$ pero no a $(1, 0, 1)$.

a. Dibujar a cada uno de los grafos H_1, H_2 y H_3.
b. Determinar la cantidad de vértices y aristas que posee el grafo H_n.
c. Hallar 2 caminos simples diferentes en H_5 desde $(0, 0, 1, 1, 0)$ hacia $(0, 0, 0, 1, 0)$.
d. Demostrar H_n no tiene 3–ciclos.
e. Hallar la cantidad de 4–ciclos que tiene H_n.
Sugerencia: hallar la cantidad de 4–ciclos en H_n que incluyen un vértice fijo.

Ejercicio 13. Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n, $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.

a. Dibujar G_1, G_2 y G_3.
b. Determinar el conjunto de enteros positivos n para los cuales G_n es un grafo conexo.
c. Determinar, para cada entero positivo n, la cantidad de componentes conexas de G_n.

Sugerencia: Sumar la cantidad de unos de cada vértice de G_n.