FORMAS CUADRÁTICAS

1. Motivación: Clasificación de puntos críticos

Definición 1.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar y sea $\mathbf{x_0} \in U$.

(1) Se dice que f presenta en $\mathbf{x_0}$ un **mínimo relativo** si existe $B(\mathbf{x_0}, \delta) \subset U$ (un entorno o bola de centro x_0 y radio δ) tal que $f(\mathbf{x_0}) \leq f(x)$, para todo $x \in B(\mathbf{x_0}, \delta)$. En este caso, se dice que $f(\mathbf{x_0})$ es un **mínimo relativo** de f.

(2) Se dice que f presenta en $\mathbf{x_0}$ un **máximo relativo** si existe $B(\mathbf{x_0}, \delta) \subset U$ tal que $f(\mathbf{x_0}) \geq f(x)$, para todo $x \in B(\mathbf{x_0}, \delta)$. En este caso, se dice que $f(\mathbf{x_0})$ es un **máximo relativo** de f.

Observación 1.2. El que f alcance un mínimo relativo en x_0 equivale a que $f(x) - f(x_0) \geq 0$ para todo x en un cierto entorno $B(\mathbf{x_0}, \delta)$ de x_0.

De forma similar, el que f alcance un máximo relativo en x_0 equivale a que $f(x) - f(x_0) \leq 0$ para todo x en un cierto entorno $B(\mathbf{x_0}, \delta)$ de x_0.

Por último, si en todo entorno de x_0 existen puntos x, x' tales que $f(x) - f(x_0) \leq 0$ y $f(x') - f(x_0) \geq 0$ esto será equivalente a que en x_0 f no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativos.

Por tanto el signo de $f(x) - f(x_0)$ en un entorno de x_0 nos informa sobre el comportamiento de f en x_0 (si alcanza un máximo, un mínimo o nada de ello).

Observación 1.3. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y presenta en $\mathbf{x_0}$ un extremo relativo, entonces

$$df_{\mathbf{x_0}} = 0$$

Recordemos el polinomio de Taylor $P_{n,x_0}(x)$ de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n veces derivable en x_0:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}_{P_{n,x_0}(x)} + r_n(x - x_0) \qquad (1)$$

Donde r_n es el resto, la diferencia entre $f(x)$ y $P_{n,x_0}(x)$ y se sabe que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$

La ecuación 1 cuando n=2 puede reescribirse como

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + r_2(x - x_0) \qquad (2)$$

Si despreciamos al resto r_2 obtendremos

$$f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \qquad (3)$$

Y si x_0 es un punto estacionario (esto es, un punto donde se anula la derivada primera, un punto candidato a que en él f alcance un máximo o un mínimo), tendremos

$$f(x) - f(x_0) \simeq \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \qquad (4)$$

Esto es, cuando x está suficientemente cerca de x_0 y además $f'(x_0) = 0$, el signo de $f(x) - f(x_0)$ es el signo de $f''(x_0)$ (ya que $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} > 0$ y $(x - x_0)^2 > 0$).

De ahí proviene el criterio de la concavidad o derivada segunda para clasificar puntos estacionarios: si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ entonces tendremos $f(x) - f(x_0) < 0$ para todo x en un cierto entorno de x_0, de donde f alcanzará un máximo relativo en x_0.

Si $f''(x_0) > 0$ entonces f alcanzará un mínimo relativo en x_0, y si $f''(x_0) = 0$ el criterio no decide.

Si llamamos $\Delta x = x - x_0$, la ecuación (4) queda

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq \frac{1}{2!} f''(x_0)(\Delta x)^2 \tag{5}$$

Para funciones de varias variables tendremos también polinomios de Taylor, con diferenciales en lugar de derivadas.

En particular el papel de la derivada segunda lo tomará el diferencial segundo.

Definición 1.4. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable. Un punto $\mathbf{x_0} \in U$ es un **punto crítico** de f si $df_{\mathbf{x_0}} = 0$.
Un punto crítico $\mathbf{x_0}$ de f es un **punto de silla** si f no alcanza en el ni un máximo ni un mínimo relativo. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{x_0}, \varepsilon)$ tales que $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x_0}) > f(\mathbf{y})$.

Supongamos que $\mathbf{x_0}$ es un punto crítico de f y que f tiene desarrollo de Taylor de orden 2 (basta suponer f de clase $\mathcal{C}^3$).

$$f(\mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0}) = df_{\mathbf{x_0}}(\Delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2} d^2 f_{\mathbf{x_0}}(\Delta\mathbf{x}) + r(\Delta\mathbf{x}), \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{r(\Delta\mathbf{x})}{\|\Delta\mathbf{x}\|^2} = 0$$

Como $\mathbf{x_0}$ es punto crítico tenemos $df_{\mathbf{x_0}}(\Delta\mathbf{x}) = 0$, entonces

$$f(\mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0}) = \frac{1}{2} d^2 f_{\mathbf{x_0}}(\Delta\mathbf{x}) + r(\Delta\mathbf{x}), \quad \text{con } \lim_{\Delta\mathbf{x}\to 0} \frac{r(\Delta\mathbf{x})}{\|\Delta\mathbf{x}\|^2} = 0$$

Si consideramos, intuitivamente, que el resto $r(\Delta\mathbf{x})$ es despreciable, entonces el signo de $d^2 f_{\mathbf{x_0}}(\Delta\mathbf{x})$ determina el signo de $\Delta f = f(\mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0})$.

El $d^2 f_{\mathbf{x_0}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática dada por

$$d^2 f_{\mathbf{x_0}}(\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot H_f(\mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{x}$$

donde

$$H_f(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x_0}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x_0}) \end{pmatrix}$$

es la matriz Hessiana de f en $\mathbf{x_0}$.

Observación 1.5. Si f es de clase $\mathcal{C}^3$ se tiene que $d^2 f_{\mathbf{x_0}}$ es una forma cuadrática.

2. Formas Cuadráticas

Definición 2.1. Una **forma cuadrática** es una función $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \cdot A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$). La matriz A se denomina **matriz asociada** a la forma cuadrática q.

Observación 2.2. Una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado 2 en n variables con coeficientes reales

$$q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

En particular, en el caso de dos variables tenemos que

$$q(x,y)=(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2.$$

Ejemplos 2.3. (1) Sea $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $q(x,y)=3x^2-6xy+y^2$ tiene por matriz asociada

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow q(x,y)=(x\ y)\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$

(2) Sea $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por

$$q(x,y,z)=(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática se expresa como polinomio como $q(x,y,z)=x^2-2y^2-2xy+4xz+2yz$.

Observación 2.4. Observar que si $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una forma cuadrática se tiene que $q(\mathbf{0})=0$.

2.1. **Diagonalización de las formas cuadráticas.** La matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica y, usando el teorema espectral para matrices simétricas, sabemos que una matriz simétrica es diagonalizable sobre una base ortonormal. Entonces siempre podemos obtener una matriz semejante a la inicial que sea diagonal. Esto permite reducir a la forma cuadrática a sea suma de cuadrados.

Teorema 2.5. *Toda forma cuadrática $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ puede transformarse a una forma*

$$\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

mediante un cambio adecuado de coordenadas $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$, donde P es una matriz ortonormal.

Proof. $q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^t\cdot A\cdot\mathbf{x}$, donde A es una matriz simétrica. Entonces, por el teorema espectral, $\exists P$ ortogonal, tal que

$$A=PDP^t$$

donde D es una matriz diagonal. Sustituyendo en la forma cuadrática

$$q(\mathbf{x})=\mathbf{x}^t\cdot PDP^t\cdot\mathbf{x}$$

Consideremos el cambio de variable $\mathbf{y}=P^t\mathbf{x}$ (equivalentemente $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$), entonces

$$q(P\mathbf{y})=\mathbf{y}^tD\mathbf{y}$$

Si $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ entonces $q(P\mathbf{y})=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

Observar que los λ_i, $i=1,\ldots,n$, son los valores propios de A.

□

Ejemplo 2.6. Sea $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma cuadrática dada por $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$.
Buscar un cambio de variable lineal e invertible de manera que se eliminen los productos de dos variables diferentes.
En este caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característio es $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda_5)(\lambda + 1)$. Los valores propios son $\{-1, 2, 5\}$. Por lo tanto existe un cambio de variable tal que

$$q(x, y, z) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2.$$

Veamos cuál es la matriz P ortogonal tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$S_{-1} = \{(2z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \left[\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$S_2 = \{(2y, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} = \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$S_5 = \{(x, 2x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]$$

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7. Reducir a suma de cuadrados la siguiente forma cuadrática.

$$q(x, y, z) = 2xy + 2yz.$$

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso los valores propios son 0, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Entonces $q(x, y, z) = -\sqrt{2}x_1^2 + \sqrt{2}x_2^2$.

2.2. **Clasificación de las formas cuadráticas.**

Definición 2.8 (Clasificación de formas cuadráticas)**.** Sea $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Decimos que q es:

- **definida positiva** si $q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$.
- **semidefinida positiva** si $q(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\exists \mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x_0}) = 0$.
- **definida negativa** si $q(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$.
- **semidefinida negativa** si $q(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\exists \mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$ tal que $q(\mathbf{x_0}) = 0$.
- **indefinida** si existen $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{x_1}$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $q(\mathbf{x_0}) > 0$ y $q(\mathbf{x_1}) < 0$.

Teorema 2.9 (Teorema de clasificación de formas cuadráticas)**.** *Sea $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática dada por $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^t$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica. Entonces*

(1) *q es definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son positivos.*
(2) *q es semidefinida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son no negativos y 0 es valor propio de A.*
(3) *q es definida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son negativos.*

(4) *q es semidefinida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son no positivos y 0 es valor propio de A.*
(5) *q indefinida si y sólo A tiene valores propios positivos y negativos.*

Proof. La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 2.5 ya que

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

donde los λ_i son los valores propios de A.

$\square$

Si retomamos los ejemplos previos tenemos que
(1) $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$ es indefinida.
(2) $q(x, y, z) = xy + yz$ es indefinida.

Ejemplo 2.10. Clasificar la forma cuadrática $q(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $1, 3$. Por lo tanto q es definida positiva.