Teorema de Taylor

Cálculo diferencial e integral de una variable

1. Introducción

Como sabemos, si f es una función derivable en un punto a, la derivada de f en a se define como el límite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La recta tangente al gráfico de a en el punto $(a, f(a))$ es la recta de ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

es decir, *es la gráfica de la función lineal* dada por $p(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Intuitivamente, esta función es la función lineal "cuya gráfica más se parece a la de f cerca del punto a". Exploremos un poco más esta idea.

Observemos que

$$\lim_{x\to a} (f(x) - p(x)) = \lim_{x\to a} (f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)) = 0.$$

Esto es simplemente porque f, al ser derivable en a, es continua en a. Pero dividiendo esta expresión por $x - a$, también tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0.$$

Es decir, no sólo $f(x) - p(x)$ es pequeño para x cerca de a, sino que es *muy pequeño. Es un infinitésimo de orden mayor que* $x - a$.

En este curso hemos visto que hay funciones no lineales con las cuales es difícil trabajar. Por ejemplo, es difícil calcular sus valores. (¿Cuánto vale el seno de 8? ¿Y e^π?) Es muy natural la idea de *aproximar* estas funciones difíciles por funciones sencillas, que entendemos mejor y con las que operamos fácilmente, como las funciones lineales. La derivada nos permite hacer esto, al menos en el entorno de un punto. Pero no siempre la aproximación lineal de una función es suficientemente buena.

A este problema responde el Teorema de Taylor, que nos permite aproximar funciones por polinomios. Lleva el nombre de Brook Taylor, que lo enunció y demostró en 1715. Es un teorema asombrosamente potente y útil, dentro de la matemática y en otras ciencias. Sin embargo, no todos los contemporáneos de Taylor comprendieron su importancia. Se popularizó recién en 1772, cuando el famoso matemático Joseph-Louis Lagrange lo llamó "el fundamento principal del cálculo diferencial".[1]

A más de trescientos años del artículo de Taylor, nuestra herramienta principal de cálculo es la computadora. Con ella, el Teorema de Taylor no ha hecho sino ganar en importancia, porque este resultado está en la base de muchos de los algoritmos con los que nuestro software hace cuentas.

2. Definición del polinomio de Taylor

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en un intervalo I, su derivada es otra función $f' : I \to \mathbb{R}$. Si f' es a su vez derivable, esto nos da $f'' : I \to \mathbb{R}$. Si f'' es a su vez derivable, obtenemos f''', y así sucesivamente. Muchas de las funciones con las que trabajamos habitualmente pueden ser derivadas tantas veces como queramos. Son ejemplo de esto los polinomios, el seno y el coseno, el logaritmo y la exponencial, y todas las funciones que se obtienen de éstas haciendo sumas, productos, cocientes y composiciones.

Notación: derivadas de orden superior

Si n es un número natural mayor que uno y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función que es n veces derivable en I, llamamos $f^{(k)}$ a su *derivada de orden* k, para $k = 1, \ldots, n$. Por ejemplo, $f' = f^{(1)}$ y $f'' = f^{(2)}$.

A veces nos referiremos a f como la derivada de orden 0, y escribiremos $f = f^{(0)}$.

Imaginemos que tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(0) = 5, \quad f'(0) = 8, \quad f''(0) = -3, \text{ y } f'''(0) = 1.$$

Claramente hay una única función polinómica p_0 de grado 0 tal que $p_0(0) = 5$, que es, justamente, la función constante igual a 5. Hay infinitas funciones lineales que en 0 valen 5, pero hay una sola, p_1, para la cual $p_1(0) = 5$ y $p_1'(0) = 8$, a saber, $p_1(x) = 5 + 8x$. Hay una única función polinómica de grado 2, p_2, tal que $p_2(0) = 5$, $p_2'(0) = 8$ y $p_2''(0) = -3$, que está dada por $p_2(x) = 5 + 8x - \frac{3}{2}x^2$.

¿Cuál es la única función polinómica de grado 3, p_3, tal que

$$\begin{aligned} p_3(0) &= 5 \\ p_3'(0) &= 8 \\ p_3''(0) &= -3 \text{ y} \\ p_3'''(0) &= 1? \end{aligned}$$

[1] *Journal de l'Ecole polytechnique*, cuaderno noveno, p.5.

Podemos hacer esto con las derivadas en 0 hasta cualquier orden, mediante el razonamiento siguiente.

Consideremos una función polinómica dada por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

y derivémosla k veces, con $k \leq n$. Al hacer esto, los primeros sumandos van a desaparecer, pues la derivada de orden k de $a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}$ es 0. Por otro lado, para $j > k$, la derivada de a_jx^j es

$$a_jj(j-1)(j-2)\cdots(j-k+1)x^{j-k}.$$

En esta expresión, x aparece con una potencia mayor o igual que uno. En resumen,

$$p^{(k)}(x) = a_kk! + xq(x),$$

donde $q(x)$ es un polinomio. Por lo tanto $p^{(k)}(0) = a_kk!$.

Si queremos *elegir* el polinomio p para que $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, tenemos que tomar $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Es decir, el polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

cumple que $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ para todo $k \leq n$, y es el único polinomio de grado menor o igual que n con esta propiedad.

Hasta aquí nos hemos limitado a mirar el valor de las derivadas de una función en 0. Podemos hacer lo mismo en cualquier punto, como veremos más adelante. Antes, haremos una observación.

Observación 1. *El polinomio*

$$-2 + 3(x-1) + (x-1)^2$$

es igual a

$$-4 + x + x^2.$$

Las dos expresiones determinan la misma función, pero presentan un aspecto distinto.

La segunda corresponde a como solemos escribir un polinomio, es decir,

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

y la segunda está en la forma de un polinomio en $x-1$, *lo que quiere decir*

$$b_0 + b_1(x-1) + \cdots + b_n(x-1)^n.$$

Todo polinomio se puede escribir como polinomio en $x-1$, y viceversa.

Nomenclatura

Si $a \in \mathbb{R}$ y escribimos un polinomio $p(x)$ como

$$b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n,$$

decimos que lo hemos escrito en la forma de *polinomio en* $x - a$.

Proposición 1. *Sean $n \in \mathbb{N}$, I un intervalo, a un elemento de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es n veces derivable en el punto a. Entonces existe un único polinomio p de grado menor o igual que n tal que*

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

para todo $k = 0, \ldots, n$.

Ejercicio 1. *Consideremos el polinomio*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Para $k = 0, \ldots, n$, calcular $p^{(k)}(x)$. Concluir que $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

El ejercicio demuestra que el polinomio que se anuncia en la Proposición 1 efectivamente existe. Para ver que es único, antes probaremos un lema.

Lema 1. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $q(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n tal que $q^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \leq n$, entonces q es el polinomio nulo.*

Demostración del Lema 1.

Haremos una demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, y que q no es el polinomio nulo. Esto es, alguno de sus coeficientes es distinto de 0. Supongamos que

$$k = \text{máx}\{j \ : \ 0 \leq j \leq n \text{ y } a_j \neq 0\}.$$

Es decir, que q es un polinomio de grado k, por lo que

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$$

con $a_k \neq 0$.

La derivada de orden k de q es constante e igual a $k! a_k$. Como $q^{(k)}(a) = 0$, tenemos que $a_k = 0$, lo cual es absurdo por cómo hemos definido k. Llegamos a una contradicción que surgió de suponer que q no era el polinomio nulo, por lo que q es el polinomio nulo.$\square$

Fin de la demostración de la Proposición 1.

Supongamos que $p_0(x)$ es otro polinomo de grado menor o igual que n tal que $p_0^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. Entonces, si $q(x) = p(x) - p_0(x)$, para todo $k \leq n$ se cumple que $q^{(k)}(a) = 0$. Por el Lema 1, $q = 0$, o sea que $p = p_0$.$\square$

Definición 1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es n veces derivable en un punto $a \in I$. El polinomio de Taylor de orden n en el punto a es el polinomio $P_n(f,a)$ de grado menor o igual que n cuyas derivadas hasta orden n en a son*

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a), \ldots, f^{(n)}(a).$$

Es decir, es el polinomio

$$P_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

3. Ejemplos

En esta sección calcularemos los polinomios de Taylor de algunas funciones conocidas. Cuando esté claro por el contexto cuáles son la función f y el punto a, escribiremos simplemente P_n en lugar de $P_n(f,a)$.

Ejemplo 1. *f polinómica.*

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ es una función polinómica, $P_n(f,a) = f$, cualquiera sea el punto a.

Para $k < n$, $P_k(f,0) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$. (¡Verificarlo como ejercicio!)

¿Qué pasa con $P_k(f,a)$ para $a \neq 0$? Consideremos por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = -4 + x + x^2$$

y tomemos $a = 1$ y $k = 1$. Si escribimos $f(x)$ como un polinomio en $x-1$, queda

$$f(x) = -2 + 3(x-1) + (x-1)^2.$$

El polinomio de Taylor $P_1(f,1)$ es el polinomio de grado 1 tal que $P_1(f,1)(1) = -2$ y $P_1(f,1)'(1) = 3$. Este es

$$P_1(f,1)(1) = -2 + 3(x-1) = 3x - 3.$$

Esto *no* es lo mismo que $-4 + x + x^2$ sin el término de grado 2.

En general, si f es una función polinómica de grado n, obtenemos el polinomio de Taylor de f de orden k en a escribiendo f como un polinomio en $x - a$ y luego borrando los términos de grado mayor que k.

Ejemplo 2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$.

Derivando esta función vemos que[2]

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Por lo tanto

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 2, \dots, f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

y el polinomio de Taylor de f de orden n en el punto 0 es

$$P_n(f,0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n.$$

Ejemplo 3. $g(x) = \log(1+x)$, $a = 0$.

Observemos que $g(0) = 0$, y que $g'(x) = f(x)$, donde f es la función del ejemplo anterior. Por lo tanto, $g^{(k)}(0) = f^{(k-1)}(0)$ para todo $k \geq 1$ y el polinomio de Taylor de g de orden n en el punto 0 es

$$P_n(g,0)(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Ejemplo 4. $f(x) = e^x$, $a = 0$.

Como $f^{(k)}(x) = f(x)$ para todo $k \geq 0$, resulta que $f^{(k)}(0) = 1$ para todo $k \geq 0$. El polinomo de Taylor de f de orden n en el punto 0 es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Ejemplo 5. $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $a = 0$.

Como sabemos, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\mathrm{sen}(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$ y $f^{(4)}(x) = \mathrm{sen}(x) = f(x)$. Por lo tanto, a partir de la derivada de orden 4, las derivadas de f empiezan a repetirse. Por ejemplo, $f^{(23)}(x) = f'''(x) = -\cos(x)$, porque $23 = 20 + 3$ y 20 es múltiplo de 4, por lo que derivar f veinte veces dará f nuevamente.

Entonces tenemos que

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 1 & \text{si el resto de dividir } k \text{ entre 4 es 1} \\ -1 & \text{si el resto de dividir } k \text{ entre 4 es 3} \end{cases}$$

[2] Aquellos que cursan Matemática Discreta 1, pueden demostrar esto por inducción completa.

Otra manera de escribir esto es

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Observemos que, para cualquier n, el polinomio de Taylor $P_n(f,0)$ no tiene términos de grado par. Entonces, si n es par, $P_n(f,0) = P_{n-1}(f,0)$, por lo que alcanza con dar los polinomios de Taylor cuyo orden es impar.

Para n impar,

$$P_n(f,0)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!}.$$

Ejercicio 2. *Para $f(x) = \cos(x)$ y $a = 0$, calcular $P_n(f,a)$.*

Ejercicio 3. *Probar que si f y g son funciones con derivadas hasta orden n en el punto a, entonces $P_n(f+g,a) = P_n(f,a) + P_n(g,a)$.*

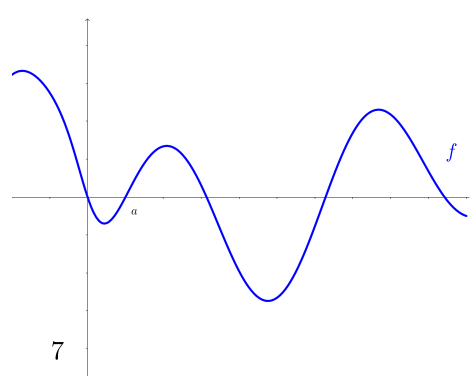
4. El teorema de Taylor

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función n veces derivable en el punto a, ya definimos su polinomo de Taylor de orden n en a. Para varias funciones conocidas, lo calculamos. En esta sección contestaremos la pregunta más importante: ¿para qué hicimos todo esto?

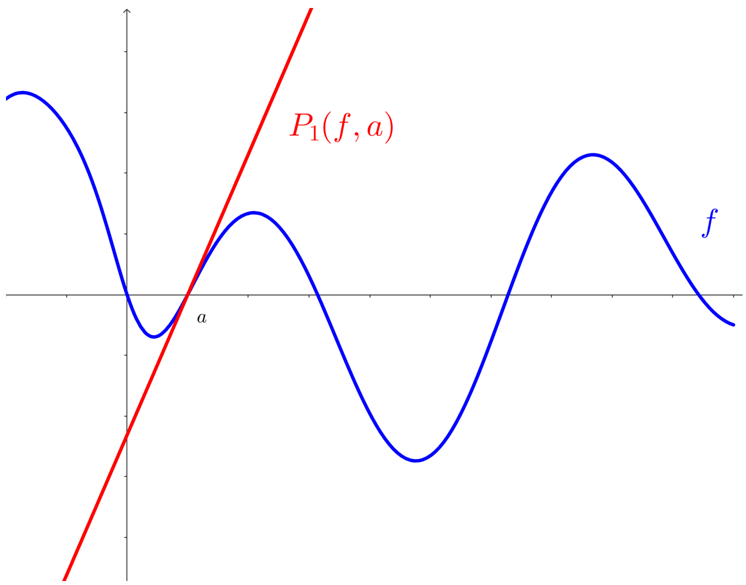
Habíamos dicho que la función lineal $P_1(f,a)$, cuya gráfica es la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$, "se parece" a f cerca de a. Las dos funciones valen lo mismo en el punto a y tienen igual derivada. Tenemos la esperanza de que $P_2(f,a)$, al tener derivadas hasta orden 2 iguales a las de f en a, se le parezca aun más, y que el parecido de $P_3(f,a)$ sea aun mayor, etc.

Los dibujos muestran las gráficas de una función f y de sus polinomios de Taylor hasta orden 4 en $a = 1$. (Para esta función, $f(1) = 0$, pero eso no tiene importancia). Para valores de x lejanos a a la función f y los polinomios son muy diferentes. Sin embargo, cerca de a, los polinomios parecen aproximar cada vez mejor a f a medida que crece su orden.

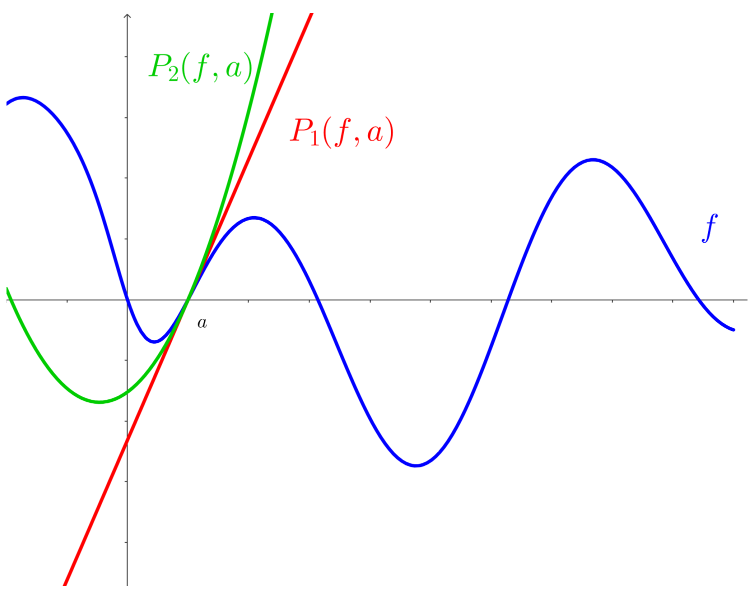
Esta es la gráfica de f.



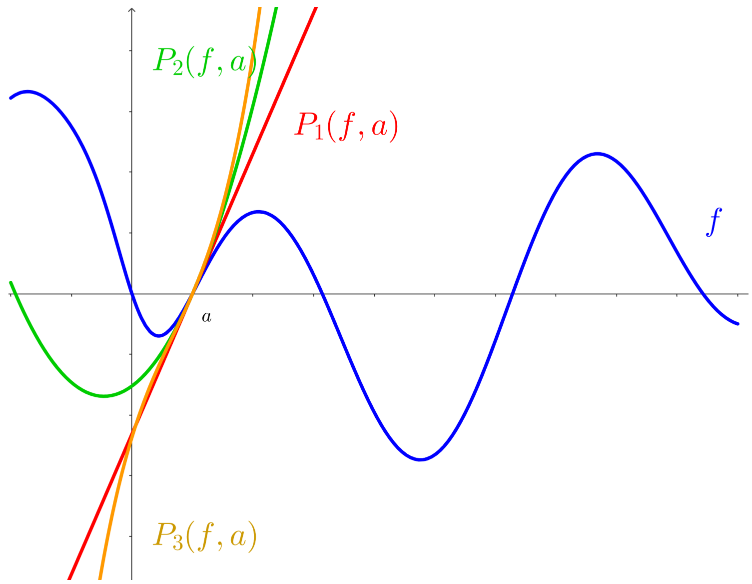
Su polinomio de Taylor de orden 1 tiene como gráfica la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.



Su polinomio de Taylor de orden 2 tiene como gráfica una parábola, que cerca de $(a, f(a))$ se parece aun más a la gráfica de f.



Su polinomio de Taylor de orden 3 tiene como gráfica una cúbica, que se parece aun más.



Tenemos que hacer precisa esta noción de *aproximación*. Cuando decimos que $P_n(f,a)$ "se parece" a f o que "aproxima" a f (para x cerca de a), lo que estamos diciendo es que la diferencia $f(x)-P_n(f,a)(x)$ es pequeña (para x cerca de a). El teorema de Taylor nos habla, justamente, de esta diferencia, que por su importancia tiene un nombre: el resto.

Definición 2. *Si f es n veces derivable en a, el resto de Taylor de orden n de f en a es la función*

$$R_n(f,a)(x) = f(x) - P_n(f,a)(x).$$

El resto $R_n(f,a)$ es el *error* que estaríamos cometiendo si reemplazáramos la función f por su polinomio de Taylor $P_n(f,a)$.

Observación 2. *Por como lo hemos definido, $R_n(f,a)$ vale 0 en a, y todas sus derivadas hasta orden n también valen 0 en a.*

Teorema 1 (Teorema de Taylor.)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es n veces derivable en un entorno de $a \in I$ y tal que $f^{(n)}$ es continua en a. Entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

es decir, el resto $R_n(f,a)$ es un infinitésimo de orden mayor que $x - a$.

Demostración.

Llamaremos R_n a $R_n(f,a)$. Como f es n veces derivable en un entorno de a y P_n es un polinomio, R_n también es n veces derivable en a y las derivadas $R_n^{(0)}$, $R_n^{(1)}$,…,$R_n^{(n-1)}$ son todas continuas. Por hipótesis, $f^{(n)}$ es continua en a, y por lo tanto también lo es $R_n^{(n)}$.

Usaremos la Regla de L'Hôpital para demostrar el teorema de Taylor. Recordemos la Observación 2, que nos dice que $R_n^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, \ldots, n$. Como las derivadas hasta orden n de R_n son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} R_n^{(k)}(x) = R_n^{(k)}(a) = 0 \tag{1}$$

para $k \leq n$.

El límite que debemos calcular, que es

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n},$$

es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, y le podemos aplicar la Regla de L'Hôpital. Al derivar una vez, dos veces,…, $n-1$ veces, seguimos teniendo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Por lo tanto, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital n veces, al cabo de las cuales obtenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}.$$

Usando la ecuación (1) para $k = n$, llegamos a que este límite es 0.□

Observación 3. *Observemos que la aproximación que nos da el teorema de Taylor es local, ya que está dada por un límite. Es decir, este teorema sólo nos habla de cuánto se parecen la función f y su polinomio de Taylor $P_n(f,a)$ en entornos, que pueden ser pequeños, del punto a.*

Ejemplo 6.

Miremos $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Su polinomio de Taylor de orden n en 0 es $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$, y define una función en toda la recta $\mathbb{R}$. Sin embargo, la función f está definida unicamente para $x > -1$, y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, por lo que

$$\lim_{x\to -1^+} R_n(x) = \lim_{x\to -1^+} (f(x) - P_n(x)) = +\infty,$$

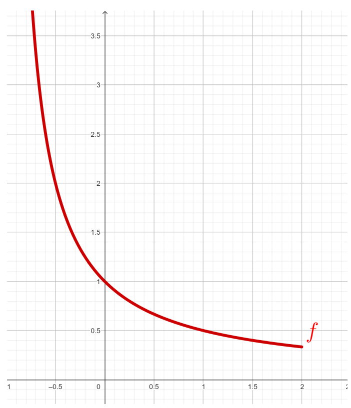
pues $\lim_{x\to -1^+} P_n(x) = P_n(-1) = n$.

Es decir, aunque n sea muy grande, la aproximación de f por P_n es muy mala cuando nos acercamos a $x = -1$.

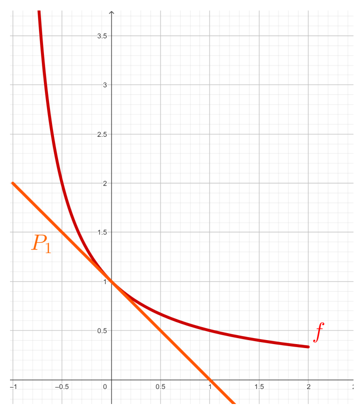
Observemos lo que pasa cerca de 1. El polinomio $P_n(1)$ vale 0 o 1 según si n es par o impar, y $f(1) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $|R_n(1)| = \frac{1}{2}$ para cualquier n, lo cual muestra que en $x = 1$ el polinomio P_n tampoco es una buena aproximación de f.

Las imágenes muestran a f y sus polinomios de Taylor hasta orden 4.

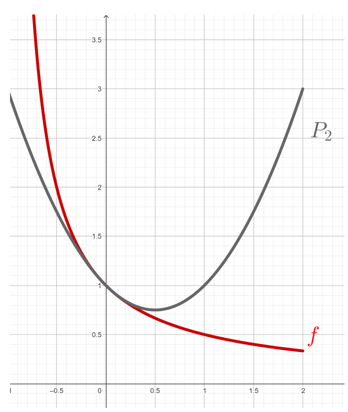
Más adelante volveremos a este ejemplo para entender mejor qué pasa con el resto $R_n(x)$ en el intervalo abierto $(-1, 1)$.



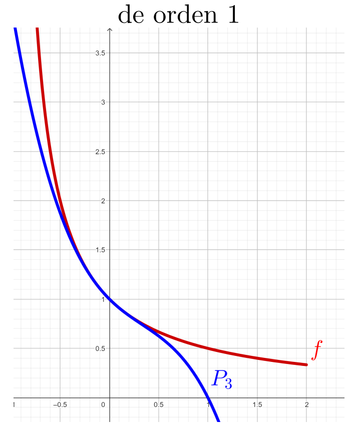
La función f



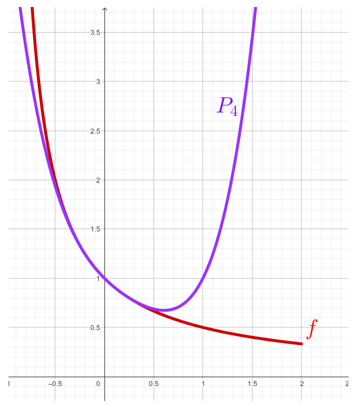
f y su polinomio de Taylor de orden 1



f y su polinomio de Taylor de orden 2



f y su polinomio de Taylor de orden 3



f y su polinomio de Taylor
de orden 4

Para terminar esta sección, veremos que no hay otros polinomios que aproximen a f cerca de a como lo hace el polinomio de Taylor.

Proposición 2. *Sea f una función que es n veces derivable en un entorno de a y tal que $f^{(n)}$ es continua en a. Si Q es un polinomio de grado menor o igual que n tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces $Q = P_n(f, a)$.

Para probar esta proposición haremos uso del siguiente lema:

Lema 2.

1. *Si P es un polinomio de grado menor o igual que n tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces P es el polinomio nulo.

2. *Si P y Q son polinomios de grado menor o igual que n tales que*

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces $P = Q$.

Demostración del Lema 2.

1. Escribamos a P como en polinomio en $x-a$.Tenemos que

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

   En el cociente

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n}$$

   el denominador tiende a 0 cuando x tiende a a. Para que el cociente tienda a cero, el numerador $P(x)$ también tiene que tender a 0, por lo que $b_0 = 0$. Entonces

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}.$$

   Repitiendo el razonamiento anterior, tenemos que $b_1 = 0$. Haciendo esto n veces, llegamos a que todos los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ son iguales a 0. Entonces $\frac{P(x)}{(x-a)^n} = b_n$. Como $\lim_{x\to a} b_n = 0$ y b_n es una constante, $b_n = 0$.

2. Aplicando el inciso anterior al polinomio $P-Q$, tenemos que $P-Q=0$, es decir, que $P=Q$.$\square$

Demostración de la Proposición 2.
Llamemos P al polinomio de Taylor $P_n(f,a)$. Entonces

$$\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} + \frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n}.$$

Por hipótesis

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

y por el Teorema de Taylor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

lo que nos permite concluir que

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Por el lema anterior, esto implica que $P=Q$.$\square$

Ejercicio 4. *Probar que si f y g son funciones con derivadas hasta orden n continuas en el punto a, y*

$$P_n(f,a)(x)P_n(g,a)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x-a)^k,$$

entonces

$$P_n(fg,a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k.$$

Leamos cuidadosamente lo que pide este ejercicio. Los polinomios $P_n(f,a)$ y $P_n(g,a)$ son polinomios de grado menor o igual que n, cuyo producto podría tener (y con frecuencia tiene) grado mayor. Digamos que el grado de $P_n(f,a)P_n(g,a)$ es N, con lo que podemos escribir

$$P_n(f,a)(x)P_n(g,a)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x-a)^k.$$

Por otro lado $P_n(fg,a)$ es, por definición, un polinomio de grado menor o igual que n. El ejercicio nos pide probar que éste se obtiene tomando el producto $P_n(f,a)(x)P_n(g,a)(x)$ y borrando todos los términos de grado mayor que n que aparezcan en él.

Por ejemplo, si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{1+x}$, entonces

$$P_2(f,0)(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad P_2(g,0)(x) = 1 - x + x^2.$$

Su producto es $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4$. El polinomio de Taylor de orden 2, en 0, de la función $fg(x) = \frac{e^x}{1+x}$ es

$$P_2(fg,0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

¡El ejercicio del recuadro brinda una excelente oportunidad de usar la Proposición 2!

5. Aplicación al cálculo de límites

Observación 4. *Si f está en las hipótesis del Teorema de Taylor y $P_n = P_n(f,a)$,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \left(\frac{P_n(x)}{(x-a)^n} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \right) = \lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{(x-a)^n},$$

pues

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Esta observación permite calcular algunos límites.

Ejemplo 7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x^3}{x^3}.$$

El polinomio de Taylor de orden 3 en 0 de la función seno es $x - \frac{x^3}{6}$. Por lo tanto, Si $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x$, el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto 0 es

$$P_3(x) = \frac{-x^3}{6}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{P_3(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Ejemplo 8.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

Tomemos la función $f(x) = e^{x^2} - 1$. Su polinomio de Taylor de orden 2 es x^2, por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{P_2(x)}{x^2} = 1.$$

Ejemplo 9.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+x) - x}$$

Podemos escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \frac{x^2}{\log(1+x) - x}.$$

Si tomamos $f(x) = \log(1+x) - x$, vemos que su polinomo de Taylor de orden 2 en 0 es $P_2(x) = -\frac{x^2}{2}$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{P_2(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1+x) - x} = -2.$$

Juntando esto con lo que sabemos del ejemplo anterior,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \frac{x^2}{\log(1+x) - x} = 1 \cdot (-2) = -2.$$

Ejemplo 10.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4}}{(x-1)^3}$$

Si calculamos el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $\arctan(x)$ en el punto 1, vemos que es igual a

$$P_3(\arctan, 1)(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12}.$$

Por lo tanto, el polinomio de orden 3 en el punto 1 de la función

$$f(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4}$$

es

$$P_2(f, 1)(x) = \frac{(x-1)^3}{12}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4}}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{P_3(f,1)(x)}{(x-1)^3} = \frac{1}{12}.$$

6. Forma del resto de Lagrange y estimación de errores

El Teorema de Taylor nos dice que una función $f(x)$ puede ser aproximada por un polinomio $P_n(f, a)(x)$ *localmente*, cerca del punto a. ¿Cuán cerca? No lo sabemos. Como el enunciado del teorema nos da el valor de un límite, no tenemos información relevante sobre cuánto se parecen $f(x)$ y $P_n(f, a)(x)$ en un punto $x \neq a$. Para esto, quisiéramos tener una acotación de

$$R_n(f, a)(x)$$

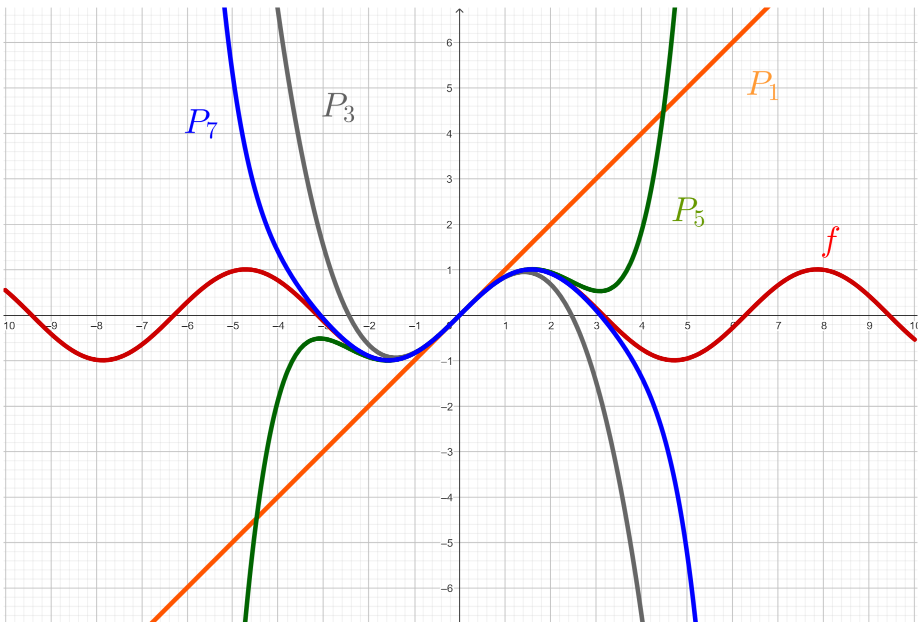
que sea válida en al menos en un entorno de a cuyo tamaño conozcamos. Esto nos permitiría hacer un cálculo aproximado de valores de $f(x)$ aun cuando $x \neq a$.

La pregunta importante que queremos responder es:

¿Podemos aproximar $f(x)$ por un polinomio *en un intervalo*?

Como vimos en el Ejemplo 6, no siempre podemos esperar que el polinomio de Taylor $P_n(f, a)$ aproxime a la función f en todo su dominio. Para $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x}$, el polinomio $P_n(f, 0)(x)$ no se parece a f en $x = 1$, aunque tomemos n muy, muy grande. Sin embargo, $P_n(f, 0)$ sí parece, al menos en las gráficas que acompañan el Ejemplo 6, estarse aproximando a $f(x)$ en $(-1, 1)$ a medida que crece n.

Ahora observemos la figura de abajo. En ella se ve la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}(x)$, y sus polinomios de Taylor en 0 hasta orden 7. El dibujo parece sugerir que, al aumentar n, el polinomio $P_n(f,0)(x)$ se aproxima a $f(x)$ en un intervalo cada vez más grande. ¿Será cierto esto? En caso de serlo, ¿nos permitirá, por ejemplo, calcular aproximadamente el número $\text{sen}(2)$?



Para responder a estas preguntas vamos a ver un resultado que nos dará una expresión para $R_n(f,a)(x)$.

Teorema 2 (Forma del resto de Lagrange). [a] *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable en I y a un punto de I. Entonces, para $x \in I$, existe un punto c_x entre a y x*[b] *tal que*

$$R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)(c_x)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

[a] En el curso de primer semestre 2024 no se verá la demostración de esto como material obligatorio. Por el momento la demostración no está en las notas, aunque sí va a ser incluida en los próximos días.

[b] Es decir, c_x está en el intervalo (a,x) o en el intervalo (x,a), según corresponda.

Antes de demostrar este teorema, veremos cómo es útil para *acotar* el resto $R_n(f,a)(x)$ para x en un intervalo. Es decir, para ver que $R_n(f,a)(x)$ es, en valor absoluto, menor que algo que depende de a, n y, por supuesto, de cuál sea la función f. Así al aproximar f por $P_n(f,a)$, tendremos una estimación del error cometido.

Ejemplo 11. *Aproximación de la función seno.*

Tomemos $f(x) = \text{sen}(x)$ y $a = 0$. El Teorema 2 nos dice que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

por lo que

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Observemos que $f^{(n+1)}$ es, dependiendo del valor de n, la función sen, cos, $-$sen, o $-$cos. En cualquier caso, y sin importar cuánto vale c_x,

$$|f^{(n+1)}(c_x)| \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Digamos que queremos calcular sen(2) con un error menor a 10^{-3}. En primer lugar, tenemos que hallar n tal que

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3}.$$

El valor $n = 9$ es el primero que cumple esto. Por lo tanto,

$$|\text{sen}(2) - P_9(2)| = |R_9(2)| < \frac{2^{10}}{10!} < 10^{-3}.$$

Como $P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$, el valor aproximado de sen(2) que obtenemos es

$$P_9(2) = 0{,}90934744268077601410934744268078.$$

¡Por supuesto que no todas estas cifras decimales son correctas para sen(2)! Pero este es un número que aproxima a sen(2) con un error menor a un milésimo.

Ejemplo 12. *¿Cuánto vale $e^{1/2}$, aproximadamente?*

Tomemos la función $f(x) = e^x$. Es una función positiva estrictamente creciente, que coincide con todas sus derivadas, por lo cual para todo $n \geq 0$

$$f^{(n+1)}(c_{\frac{1}{2}}) = e^{c_{\frac{1}{2}}} < e^{\frac{1}{2}},$$

si $c_{\frac{1}{2}} \in (0, \frac{1}{2})$.

Si no sabemos cuánto vale $e^{1/2}$, ¿de qué nos sirve esta acotación? Sabemos que $e < 4$, por lo que $e^{1/2} < 4^{1/2} = 2$. Por lo tanto,

$$f^{(n+1)}(c_{\frac{1}{2}}) = e^{c_{\frac{1}{2}}} < 2,$$

si $c_{\frac{1}{2}} \in (0, \frac{1}{2})$.

Si tomamos el polinomio de Taylor de f en 0, tendremos que

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(n+1)}(c_{\frac{1}{2}})}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!2^n}.$$

Eligiendo $n = 4$, $\frac{1}{(n+1)!2^n} = \frac{1}{5!2^4} < 10^{-3}$. Por lo tanto

$$P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{2^3}\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^4}\frac{1}{4!}$$

es un número que aproxima $e^{1/2}$ a menos de un milésimo.

Ejercicio 5. *Tomemos la función del Ejemplo 6, es decir, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Para $n \geq 0$, sean P_n su polinomio de Taylor de orden n en 0, y $R_n = f - P_n$ el resto.*

1. *Calcular $R_n(1)$ con la forma del resto de Lagrange.*
2. *Investigar si, para $x \in (0,1)$, el valor de $P_n(x)$ aproxima a $f(x)$ cuando n es suficientemente grande.*
3. *Investigar si, para $x \in (-1,0)$, el valor de $P_n(x)$ aproxima a $f(x)$ cuando n es suficientemente grande.*

Expansión decimal

Si calculamos un número α con un error menor a 10^{-3}, ¿cuántas cifras hemos calculado en forma correcta? ¡No sabemos! Observemos que

$$\alpha_0 = 1 - 10^{-4} \quad \text{y} \quad \alpha_1 = 1 + 10^{-4}$$

están a distancia menor que 10^{-3} y difieren en la cifra de las unidades. Efectivamente, $\alpha_0 = 0,9999$ y $\alpha_1 = 1,0001$.

Entonces, si solo podemos calcular el número π aproximadamente, ¿cómo estamos seguros de que su segunda cifra después de la coma es un 4?

Recordemos cómo se escribe la expansión decimal. Digamos que α es un número entre 0 y 1, es decir, es de la forma $\alpha = 0,\ldots$. Dividimos el intervalo $[0,1]$ en diez subintervalos iguales:

$$\left[0,\frac{1}{10}\right],\ \left[\frac{1}{10},\frac{2}{10}\right],\ \left[\frac{2}{10},\frac{3}{10}\right],\ \left[\frac{3}{10},\frac{4}{10}\right],\ \left[\frac{4}{10},\frac{5}{10}\right],$$

$$\left[\frac{5}{10},\frac{6}{10}\right],\ \left[\frac{6}{10},\frac{7}{10}\right],\left[\frac{7}{10},\frac{8}{10}\right],\ \left[\frac{8}{10},\frac{9}{10}\right],\ \text{y}\ \left[\frac{9}{10},1\right].$$

Si α está, por ejemplo, entre $\frac{6}{10}$ y $\frac{7}{10}$, su expansión decimal comienza con un 6. Es decir, $\alpha = 0,6\ldots$.

Para saber la segunda cifra decimal de α, dividimos el intervalo $[\frac{6}{10}, \frac{7}{10}]$ en diez subintervalos iguales. Si α está, por ejemplo, en el subintervalo $[\frac{62}{100}, \frac{63}{100}]$, su segunda cifra decimal será un 2.

¿Qué pasa si α *es* el número $\frac{63}{100}$? ¿Es de la forma

$$0,62\ldots$$

por pertenecer a $[\frac{62}{100}, \frac{63}{100}]$, o de la forma

$$0,63\ldots$$

por pertenecer a $[\frac{63}{100}, \frac{64}{100}]$? ¡Lo podemos escribir de cualquiera de las dos maneras! En efecto,

$$\frac{63}{100} = 0,63 = 0,62999999999999999\ldots,$$

donde la sucesión de nueves es infinita.

Tan cerca como queramos del $\frac{63}{100}$, habrá otros números cuya segunda cifra decimal sea 2 y números cuya segunda cifra decimal sea 3.

En realidad, todos los números que son de la forma $\dfrac{k}{10^n}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, tienen dos expansiones decimales distintas. Son los números enteros y los números que, al subdividir un intervalo de extremos enteros $[N, N+1]$ primero en 10, luego en 10^2, luego en 10^3, etc., en algún momento caen en el borde de dos subintervalitos. Pero *todos los demás números tienen una expansión decimal única.*

Volvamos a la pregunta original, la de si podemos, al calcular aproximadamente un número, estar seguros de algunas de sus cifras decimales. Supongamos que sabemos que el número π está a una distancia menor de $\frac{1}{1000}$ de $3,1413$. Eso quiere decir que está entre $3,1403$ y $3,1423$. En particular, está necesariamente en el intervalo $(3,14, 3,15) = (3+\frac{14}{100}, 3+\frac{15}{100})$, por lo que estamos seguros de que sus primeras dos cifras decimales son 1 y 4.