Práctico 13

funciones medibles

1. Defina una función no medible $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ para la cual $f^{-1}(\{+\infty\})$ y $f^{-1}(\{-\infty\})$ son conjuntos medibles no vacíos.

2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, y denote la función indicatriz o característica sobre A como $\mathbb{I}_A$. Demuestre que:

   a) $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$.
   b) $\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$.
   c) $\mathbb{I}_{\mathbb{R}-A} = 1 - \mathbb{I}_A$.

   Demuestre además que la suma y el producto de dos funciones simples es una función simple.

3. Sean $E, D \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles y $f: D \cup E \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que f es medible si, y solamente si, las restricciones de f sobre D y E, denotadas por $f|_D$ y $f|_E$, son medibles.

4. Sean $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones generalizadas medibles que son finitas en casi todas partes, es decir,

   $$m_{\mathcal{L}}(\{x \in E \ / \ f(x) = \pm\infty\}) = 0 \ \text{ y } \ m_{\mathcal{L}}(\{x \in E \ / \ g(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

   Demuestre que $f + g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible sin importar cómo se defina $f + g$ en los puntos $x \in E$ para los cuales $f(x) = +\infty$ y $g(x) = -\infty$, o $f(x) = -\infty$ y $g(x) = +\infty$.

5. Demuestre que si $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $g \circ f$ es medible.

6. Demuestre o dé un contraejemplo:

   (a) Si $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones tales que g es continua en $\mathbb{R}$ y $f = g$ en casi todas partes, entonces f es continua en casi todas partes.

   (b) Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en casi todas partes, entonces existe una función continua $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ en casi todas partes.