En esta última parte del curso, nos enfocaremos en estudiar una generalización de la integral de Riemann, conocida como integral de Lebesgue. La construcción de esta integral, como su nombre lo indica, tiene que ver con la medida de Lebesgue. Empezaremos estudiando las funciones que podrán integrarse según la integral de Lebesgue.

Funciones medibles

Definición: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

1) f es medible Borel si $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, es decir, si $f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
2) f es medible Lebesgue si $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, es decir, si $f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

Observación: f es medible Borel (resp. Lebesgue) si y solamente si $f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (resp. $f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$) para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

En efecto, por un ejercicio de práctica, se tiene que $f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$ y que

$$f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{A}(\{f^{-1}((a,b)) \,/\, a < b\}).$$

Entonces se siguen las equivalencias mencionadas.

Ejemplo: 1) Toda función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel, y toda función medible Borel es medible Lebesgue.

Escaneado con CamScanner

2) $\mathbb{1}_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}. \end{cases}$$

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ es medible. En efecto, considere $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a < 0 < 1 < b, \\ \mathbb{Q} & \text{si } a < 0 < b \leq 1, \\ \mathbb{R}-\mathbb{Q} & \text{si } 0 \leq a < 1 < b, \\ \emptyset & \text{si } 0 \leq a < b \leq 1. \end{cases}$$

donde $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}, \emptyset \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

3) Función característica o indicatriz:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, se define la función característica de E como $\mathbb{1}_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

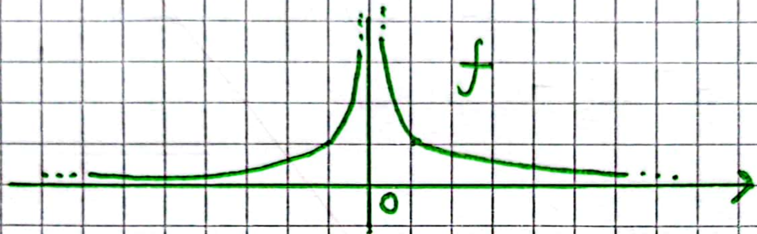
Entonces, $\mathbb{1}_E$ es medible Lebesgue si y solamente si $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Esto se nota como en el ejemplo anterior:

$$\mathbb{1}_E^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0,1 \in (a,b), \\ E & \text{si } 1 \in (a,b) \text{ y } 0 \notin (a,b), \\ E^c & \text{si } 1 \notin (a,b) \text{ y } 0 \in (a,b), \\ \emptyset & \text{si } 0,1 \notin (a,b). \end{cases}$$

Se puede extender el concepto de función medible a funciones generalizadas $f: \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ (es decir, puede existir al menos un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = +\infty$ o $f(x) = -\infty$) Denotemos $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si} \quad x \neq 0, \\ +\infty & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$



Definición: $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible Borel (resp. medible Lebesgue) si

1) $f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (resp. $f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$), $\forall\, a<b$.
2) $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (resp. $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$).
3) $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (resp. $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$).

Ejemplo: La función generalizada del ejemplo anterior es medible Borel.

A partir de ahora, denotaremos los conjuntos de funciones generalizadas medibles Borel y medibles Lebesgue como

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}) \quad y \quad \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}),$$

respectivamente.

También se puede extender el concepto de función medible a funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Definición: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible y $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función generalizada. Diremos que f es medible (Lebesgue) si:

(1) $f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, $\forall a < b$.

(2) $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, y

(3) $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

Observaciones:

(1) A partir de ahora, el término "función medible" hará referencia únicamente a las funciones medibles Lebesgue, a pesar de que la definición anterior se puede adaptar a funciones "medibles Borel", sustituyendo $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y asumiendo E boreliano.

(2) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ y $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Defina $\hat{f}: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Si $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, entonces f es medible si y solamente si $\hat{f}$ es medible. En efecto, basta notar que

$$\hat{f}^{-1}((a,b)) = \begin{cases} f^{-1}((a,b)) & \text{si } 0 \notin (a,b), \\ f^{-1}((a,b)) \cup E^c & \text{si } 0 \in (a,b) \end{cases}$$

$$\hat{f}^{-1}(\{+\infty\}) = f^{-1}(\{+\infty\}) \text{ y } \hat{f}^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}(\{-\infty\}),$$

donde $E^c \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

Escaneado con CamScanner

Propiedades de las funciones medibles:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles.

(1) $c : E \to \mathbb{R}$, $c(x) = c, \forall x \in E$ es medible.

• <u>Demostración:</u> $c^{-1}((a,b)) = \begin{cases} E & \text{si } c \in (a,b), \\ \emptyset & \text{si } c \notin (a,b). \end{cases}$

En cualquier caso, $c^{-1}((a,b))$ es medible.

$\therefore$ la función constantemente igual a c sobre E es medible. $\blacksquare$

(2) La función $f + c : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f + c\,(x) = f(x) + c, \ \forall x \in E$$

es medible.

• <u>Demostración:</u>
$$\begin{aligned}(f+c)^{-1}((a,b)) &= \{x \in E \,/\, a < f(x) + c < b\} \\ &= \{x \in E \,/\, a - c < f(x) < b - c\} \\ &= f^{-1}((a-c, b-c)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}},\end{aligned}$$
ya que f es medible.

Por otro lado, $(f+c)^{-1}(\{+\infty\}) = f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ y $(f+c)^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

$\therefore$ $f + c$ es medible. $\blacksquare$

(3) La función $c \cdot f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x), \ \forall x \in E$$

es medible.

Escaneado con CamScanner

• **Demostración:**

(i) $c=0$: En este caso, $c\cdot f$ es la función constantemente igual a cero y por ende medible.

(ii) $c>0$: $(cf)^{-1}((a,b)) = \{x \in E \,/\, a < cf(x) < b\}$

$$= \left\{x \in E \,/\, \frac{a}{c} < f(x) < \frac{b}{c}\right\}$$

$$= f^{-1}\left(\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)\right) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \text{ ya que } f \text{ es medible.}$$

Por otro lado,

$$(cf)^{-1}(\{+\infty\}) = f^{-1}(\{+\infty\}) \text{ y}$$

$$(cf)^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}(\{-\infty\}).$$

(iii) $c<0$: Este caso es análogo al anterior. ■

(4) Si $f(x) \neq \pm\infty$ o $g(x) \neq \pm\infty$, entonces la función $f+g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in E$$

es medible.

• **Demostración:** Solamente trabajaremos el caso $g(x) \neq \pm\infty$.

Para simplificar la prueba note que

$$(f+g)^{-1}((a,b)) = (f+g)^{-1}((-\infty,b)) \cap (f+g)^{-1}((a,+\infty)),$$

donde demostraremos que $(f+g)^{-1}((-\infty,b))$ es medible (la prueba para $(f+g)^{-1}((a,+\infty))$ es análoga).

$$(f+g)^{-1}((-\infty,b)) = \{x \in E \,/\, f(x) + g(x) < b\}$$

$$= \{x \in E \,/\, f(x) < b - g(x)\} \text{ ya que } g(x) \neq \pm\infty.$$

Sea $x \in (f+g)^{-1}((-\infty,b))$, es decir, $f(x) < b - g(x)$. Sea $r_x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < r_x < b - g(x)$.

Así,

$$(f+g)^{-1}((-\infty,b)) = \bigcup_{r_x} \{x\in E / f(x) < r_x\} \cap \{x \in E / g(x) < b - r_x\}$$
$$= \bigcup_{r_x} f^{-1}((-\infty, r_x)) \cap g^{-1}((-\infty, b-r_x))$$

donde $f^{-1}((-\infty, r_x)), g^{-1}((-\infty, b-r_x)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ ya que f y g son medibles. Como la intersección y uniones numerables de medibles es medible, y la unión anterior es numerable, se tiene que $(f+g)^{-1}((-\infty,b)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

Por otro lado, $(f+g)^{-1}(\{+\infty\}) = f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ y $(f+g)^{-1}(\{-\infty\}) = f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, ya que $g(x) \neq \pm\infty$ para todo $x \in E$. ■

Observación: Si $f, g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles, la función $f+g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ no está definida en los puntos $x \in E$ donde $f(x) = +\infty$ y $g(x) = -\infty$. Bajo ciertas condiciones, que veremos más adelante, $f+g$ es medible.

(5) La función $f^2: E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f^2(x) = (f(x))^2, \ \forall x \in E$$

es medible.

• **Demostración:** Analizamos varios casos:

(i) $b \leq 0$: $(f^2)^{-1}((a,b)) = \emptyset \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

(ii) $a < 0 < b$: $(f^2)^{-1}((a,b)) = (f^2)^{-1}([0,b)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

(iii) $0 \leq a < b$: $(f^2)^{-1}((a,b)) = \{x \in E / a < (f(x))^2 < b\}$
$$= \{x \in E / \sqrt{a} < f(x) < \sqrt{b}\}$$
$$= (f)^{-1}((\sqrt{a}, \sqrt{b})) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}.$$

Por otro lado,

$$(f^2)^{-1}(\{-\infty\}) = \emptyset \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \quad y \quad (f^2)^{-1}(\{+\infty\}) = f^{-1}(\{+\infty\}) \cap f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}.$$

$\therefore$ f^2 es medible. ■

(6) Si $f(x) \neq \pm\infty$ y $g(x) \neq \pm\infty$ para todo $x \in E$, entonces la función $f \cdot g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in E$$

es medible.

· Demostración: Es consecuencia de la igualdad

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

y de las propiedades anteriores. ■

Observación: Si $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ son medibles, la función $f \cdot g$ no está definida en los puntos $x \in E$ donde $f(x) = 0$ y $g(x) = \pm\infty$, o donde $f(x) = \pm\infty$ y $g(x) = 0$. Bajo ciertas condiciones que veremos más adelante, $f \cdot g$ es medible.

Respecto a las dos observaciones anteriores, necesitamos el siguiente concepto.

Definición: Sea P una propiedad enunciada para puntos en un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que P se cumple en casi todas partes (abreviado c.t.p.) de E si el conjunto de puntos $x \in E$ donde no se cumple P tiene medida cero.

Ejemplo: 1) Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones. Se dice que $f = g$ c.t.p. si $m_L(\{x \in \mathbb{R} / f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

2) Siguiendo la demostración de la propiedad (4), sean $f, g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles. Si

$$D = \left\{ x \in E \;\middle/\; \begin{array}{l} f(x) = +\infty \text{ y } g(x) = -\infty, \\ \text{o} \\ f(x) = -\infty \text{ y } g(x) = +\infty \end{array} \right\}$$

tiene medida cero, entonces $f + g: E - D \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible.

3) Análogamente, si $f, g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles y

$$D = \left\{ x \in E \;\middle/\; \begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ y } g(x) = \pm\infty, \\ \text{o} \\ f(x) = \pm\infty \text{ y } g(x) = 0 \end{array} \right\}$$

tiene medida cero, entonces $f \cdot g: E - D \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible.

Proposición: Si $f, g: E \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones y $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible, entonces

f medible y $f = g$ c.t.p. $\Longrightarrow$ g medible.

· **Demostración**: Considere $D = \{x \in E / f(x) \neq g(x)\}$. Sabemos que $m_L(D) = 0$. Por otro lado, sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

$$\begin{aligned} g^{-1}((a,b)) &= \{x \in E / a < g(x) < b\} \\ &= \{x \in E - D / a < f(x) < b\} \cup \{x \in D / a < g(x) < b\}. \end{aligned}$$

Notamos que:

- $\{x\in E - D / a < f(x) < b\} = f^{-1}((a,b)) - D \in \mathfrak{M}_L$ ya que $f^{-1}((a,b)) \in \mathfrak{M}_L$ y $D \in \mathfrak{M}_L$.

- $\{x \in D / a < g(x) < b\} \subseteq D$ y $m_L(D) = 0$ implica que $\{x\in D / a < g(x) < b\}$ es medible, ya que m_L es completa.

Así, $g^{-1}((a,b)) \in \mathfrak{M}_L$. La prueba para $g^{-1}(\{-\infty\})$ y $g^{-1}(\{+\infty\})$ es análoga. ■

Ejemplo: Sea $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones y $f: E\to\mathbb{R}$ una función. Se dice que (f_n) converge a f puntualmente en c.t.p. si

$$m_L(\{x\in E / f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$$

($E\subseteq \mathbb{R}$ se toma medible).

Respecto a sucesiones de funciones, tenemos las siguientes propiedades respecto al concepto de función medible.

Proposición: Sea $\{f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

(i) La función $\sup\{f_1,\dots, f_n\} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sup\{f_1,\dots,f_n\}(x) := \sup\{f_1(x),\dots,f_n(x)\},\ \forall x\in E$$

es medible.

• Demostración: Denotemos $f = \sup\{f_1,\dots,f_n\}$

$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((a,+\infty)) \cap f^{-1}((-\infty,b))$, donde

$f^{-1}((a,+\infty)) = \{x\in E / \sup\{f_1(x),\dots,f_n(x)\} > a\}$

$= \{x \in E \,/\, \exists\, i \in \{1, \dots, m\}$ con $f_i(x) > a\}$

$= \bigcup_{i=1}^{m} \{x \in E \,/\, f_i(x) > a\} = \bigcup_{i=1}^{m} f_i^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ ya

que cada f_i es medible; y

$f^{-1}((-\infty, b)) = \{x \in E \,/\, \sup\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} < b\}$

$= \{x \in E \,/\, f_i(x) < b,\ \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$

$= \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}.$

Así, $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

$f^{-1}(\{-\infty\}) = \{x \in E \,/\, \sup\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} = -\infty\}$

$= \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$

$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}.$ ■

(2) La función $\inf\{f_1, \dots, f_m\} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$\inf\{f_1, \dots, f_m\}(x) := \inf\{f_1(x), \dots, f_m(x)\},\ \forall x \in E$

es medible.

• <u>Demostración</u>: Análoga a (1). ■

(3) La función $\sup\{f_n / n \in \mathbb{N}\} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$\sup\{f_n / n \in \mathbb{N}\}(x) := \sup\{f_n(x) / n \in \mathbb{N}\},\ \forall x \in E$

es medible.

• <u>Demostración</u>: Similar a (1). Si denotamos $f = \sup\{f_n\}$, entonces

$$f^{-1}((a, b)) = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}((a, +\infty))\right) \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}((-\infty, b))\right)$$

$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(\{-\infty\})$ y $f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}(\{+\infty\})$ ■

(4) La función $\inf\{f_n / n \in \mathbb{N}\} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\inf\{f_n / n \in \mathbb{N}\}(x) := \inf\{f_n(x) / n \in \mathbb{N}\}, \forall x \in E$$

es medible.

- <u>Demostración</u>: Similar a (3). ∎

(5) La función $\lim\sup f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(\lim\sup f_n)(x) := \inf_{n \geq 0}\left(\sup_{k \geq n} f_k(x)\right), \forall x \in E$$

es medible.

- <u>Demostración</u>: Es consecuencia de (3) y (4). ∎

(6) La función $\lim\inf f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(\lim\inf)(x) := \sup_{n \geq 0}\left(\inf_{k \geq n} f_k(x)\right), \forall x \in E$$

es medible.

- <u>Demostración</u>: Análoga a (5). ∎

Funciones simples

Recuerde que dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, se define su función indicatriz o característica como

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

<u>Definición</u>: Sean $E_1, \ldots, E_n \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Una **función simple** $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una combinación lineal

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observación:

1) Toda función simple es medible, ya que cada $\mathbb{1}_{E_i}$ es medible, y así cada $a_i \mathbb{1}_{E_i}$ es medible (escalar por una función medible), y finalmente $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}$ es medible por ser la suma de funciones medibles.

2) Toda función simple toma un número finito de valores. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función simple y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ su conjunto de valores no nulos.

$$\varphi \text{ medible} \implies A_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$$

ya que $\{\alpha_i\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Los A_i son entonces medibles y disjuntos dos a dos. Así, podemos escribir φ como

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

A tal expresión se le conoce como representación canónica de φ.

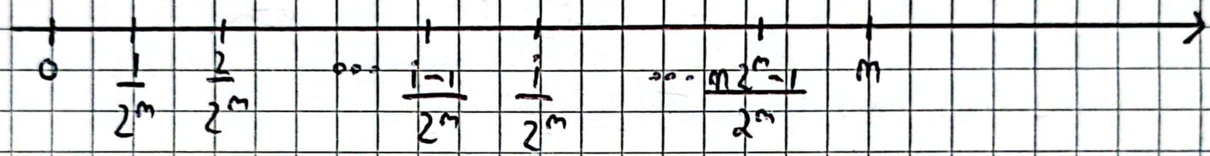
3) La suma, producto por un escalar, y multiplicación de funciones simples es simple.

Teorema de aproximación por funciones simples:

Sea $f: E \to [0, +\infty]$ una función medible. Entonces, existen funciones simples $\varphi_n: E \to [0, +\infty)$ tales que:

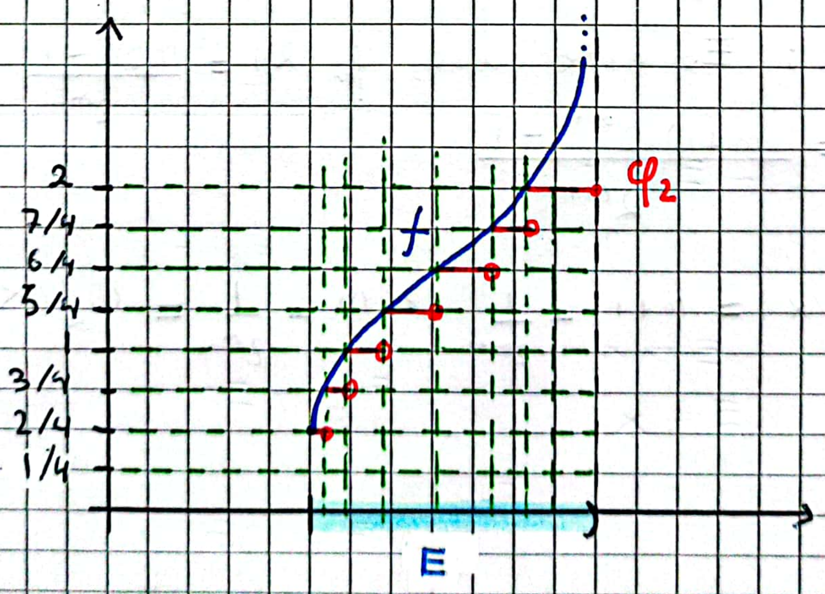
1) $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq f$.
2) $\forall x \in E$, $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

- **Demostración:** Para cada n, la idea es dividir $[0, +\infty]$ de la siguiente manera:



Se define entonces $\varphi_n: E \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\forall x \in E, \ \varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n} & \text{si } f(x) \in \left[\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right), \ i = 1, \dots, n2^n \\ n & \text{si } f(x) \geq n. \end{cases}$$



(i) φ_n es simple $\forall n \in \{1, 2, \dots\}$:

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{(i-1)}{2^n} \mathbb{1}_{f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)}.$$

(ii) Claramente $0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E$.

(iii) $\varphi_n \to f$ puntualmente.

Si $f(x) < \infty$, entonces existe $n \in \{1, 2, \ldots\}$ tal que $f(x) < n$ y $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ dado.

Luego, $f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{i}{2^n} - \frac{(i-1)}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

Si $f(x) = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} n = \infty = f(x)$.

(iii) $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$:

- $f(x) \geq n+1$: En este caso, $\varphi_n(x) = n < n+1 = \varphi_{n+1}(x)$.
- $n \leq f(x) < n+1$: En este caso, $\varphi_n(x) = n$ y

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{(n+1)2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} = n + \frac{(2^{n+1} - 1)}{2^{n+1}} \geq \varphi_n(x).$$

- $f(x) < n$: En este caso, $\varphi_n(x) = \frac{n2^n - 1}{2^n}$ y

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{(n+1)2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$$

Así, $\varphi_{n+1}(x) = n+1 - \frac{1}{2^{n+1}} > n - \frac{1}{2^n} = \varphi_n(x)$. ∎

Integral de Lebesgue de funciones simples

Definición: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible y con medida finita. Se define la integral de $\mathbb{1}_E$ sobre E como

$$\int_E \mathbb{1}_E \, dm_1 = m_1(E).$$

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función simple con representación canónica

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i},$$

donde $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ tiene medida finita, se define la integral de Lebesgue de φ sobre $\mathbb{R}$ como

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot m_1(A_i).$$

Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible, se define la integral de Lebesgue de φ sobre E como

$$\int_E \varphi \, dm_1 = \int \varphi \cdot \mathbb{1}_E \, dm_1$$

Note que $\varphi \cdot \mathbb{1}_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E}$.

Así,
$$\int_E \varphi \, dm_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot m_1(A_i \cap E).$$