Introducción a la Teoría de la Información

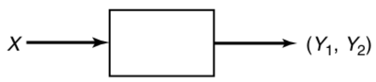
Práctico 6: Canal Gaussiano

Año 2024

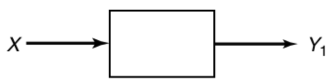
Cada ejercicio tiene un símbolo que indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: $\diamondsuit$ básica, $\star$ media, $*$ avanzada, y $\ddagger$ difícil.

$\diamondsuit$ Problema 1

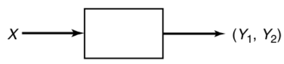
Sean Y_1 e Y_2 condicionalmente independientes y condicionalmente idénticamente distribuidos dado X.
(a) Muestre que $I(X; Y_1, Y_2) = 2I(X; Y_1) - I(Y_1; Y_2)$.
(b) Concluya que la capacidad del canal



es menor que el doble de la capacidad del canal



$\star$ Problema 2



Considere el canal gaussiano ordinario con dos observaciones correlacionadas de X, es decir, $Y = (Y_1, Y_2)$, donde

$$Y_1 = X + Z_1$$
$$Y_2 = X + Z_2$$

con una restricción de potencia P en X, y $(Z_1, Z_2) \sim N_2(0, K)$, donde

$$K = \begin{bmatrix} N & N\rho \\ N\rho & N \end{bmatrix}$$

Encuentre la capacidad C para
(a) $\rho = 1$
(b) $\rho = 0$
(c) $\rho = -1$

♢ Problema 3

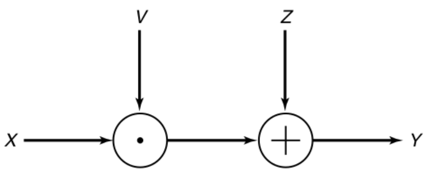
Considere un canal con ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN) con una restricción de potencia esperada en la salida P. Así,

$$Y = X + Z$$

donde $Z \sim N(0, \sigma^2)$, Z es independiente de X, y $\mathbb{E}[Y^2] \leq P$.
Encuentra la capacidad del canal.

♢ Problema 4

Considere un canal de desvanecimiento con ruido aditivo



$$Y = XV + Z,$$

donde Z es ruido aditivo, V es una variable aleatoria que representa el desvanecimiento, y Z y V son independientes entre sí y de X.
Argumente que el conocimiento del factor de desvanecimiento V mejora la capacidad demostrando que

$$I(X; Y|V) \geq I(X; Y).$$

⋆ Problema 5

Un canal transmite una variable discreta binaria, $X = V$ o $X = -V$ con probabilidades $1 - p$ y p respectivamente. El canal tiene ruido Z de distribución uniforme en $(-a, a)$. Se recibe $Y = X + Z$.

1. Expresar o dibujar la densidad de probabilidad de Y distinguiendo los casos:
   (a) $a < V$ y
   (b) $V < a < 2V$.

2. Hallar la entropía discreta o continua, según corresponda, de X, Z e Y, en los dos casos citados. Hallar la entropía condicional $H(Y|X)$. Comentar el resultado $H(Y)$ en el caso 1.

3. Hallar la capacidad del canal en los dos casos. Comentar cómo varía con a.

4. Se decide si se recibió V o $-V$ comparando Y con un umbral U. ¿Cuál es el mejor valor de U para minimizar la probabilidad de error en cada uno de los casos 1 y 2?

⋆ Problema 6

Una variable aleatoria binaria $X \in \{0, 1\}$ equiprobable se codifica con niveles de tensión $+V$ y $-V$, con restricción de potencia $V^2 \leq P$. Se transmite por un canal con ruido gaussiano aditivo de potencia N, es decir $Z \sim \mathcal{N}(0, N)$.
La detección se realiza comparando el valor recibido Y con el umbral 0:

- Si $Y > 0$ se detecta $\hat{X} = 1$
- Si $Y < 0$ se detecta $\hat{X} = 0$

1. ¿Cuál es el modelo de canal discreto que corresponde a lo descrito?

2. Expresar la probabilidad de error en la detección mediante la función de distribución acumulada de la gaussiana. (Ver nota).

3. Ahora el canal se divide en dos tramos iguales, con la misma restricción de potencia P. El valor detectado a la salida del primer tramo es retransmitido por el segundo. Asumiremos que cada tramo tiene ruido blanco gaussiano, de potencia $\frac{N}{2}$ referido a su salida. La detección se realiza de igual forma, comparando con 0 a la salida de cada tramo. Hallar la probabilidad de error en cada tramo, siempre en función de Φ.

4. Hallar el error final, al cabo de la concatenación de los dos tramos. Compararla con la de la situación anterior.

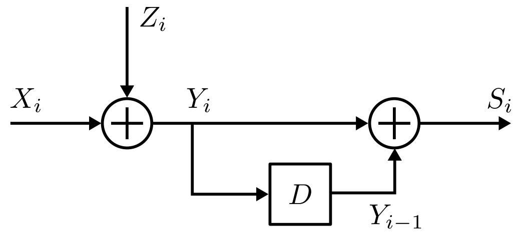
5. Hallar $\frac{P}{N}$ en las dos configuraciones descritas, para tener una probabilidad de error total de 0.01 (Ver tabla al final del práctico).

Nota: Recordar que si X es variable gaussiana normalizada, $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, llamamos Φ a la acumulada:
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
Para una variable gaussiana no normalizada $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,
$Pr(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

$\star$ Problema 7

En el canal de la figura se asume que la señal X y el ruido Z son independientes, las muestras Z_i son iid con distribución gaussiana, $Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$, y el bloque D representa un retardo unitario.

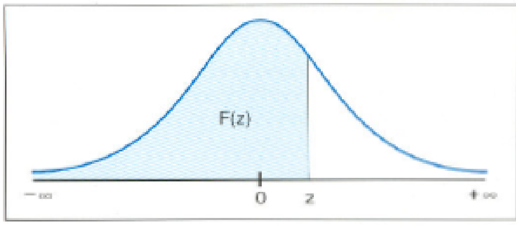
- $\mathbb{E}[X_i] = 0$,
- $\mathbb{E}[X_i^2] = P, \forall i$,
- $\mathbb{E}[X_{i-1}X_i] = \rho P$,
- $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$ si $|i - j| \geq 2$, es decir, X_i solo tiene correlación con X_{i-1}, el inmediato anterior.



(a)Hallar S_i, $\mathbb{E}[S_i]$ y $\mathbb{E}[S_i^2]$.
(b)Hallar $h(S|X)$. Nota: Por si hubiera duda, $S|X$ significa que se condiciona a las muestras ya emitidas, en particular X_i y X_{i-1}.
(c)Hallar la capacidad del canal, decir con qué distribución de la variable X se alcanza y discutir según ρ.

Tabla de distribución normal $N(0, 1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000