Universidad de la República **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería **Primer semestre 2024**
Instituto de Matemática y Estadística

PRÁCTICO 10: Homomorfismos e Isomorfismos de grupos

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no homomorfismos de grupo.

a. La función traza $tr : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$.

b. La función $f : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$, dada por: $f(A) = tr(A^2)$.

c. La función determinante $\det : (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$; donde $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.

d. La función $f : (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dada por: $f(A) = det(A^2)$.

e. La función $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, dada por: $f(\lambda) = \lambda A$; donde $A \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ es una matriz dada. Hallar condiciones sobre A para que f sea morfismo.

f. La función trasponer $T : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +)$, dada por: $T(A) = A^t$.

g. La función trasponer $T : (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$, dada por: $T(A) = A^t$.

h. La función $f : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dada por: $f(x, y, z) = e^{x-2y+z}$.

Ejercicio 2. Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos finitos.

a. Sea $g \in G_1$. Probar que $o(\varphi(g))$ divide a $\operatorname{mcd}(|G_1|, |G_2|)$.

b. Probar que si $|G_1|$ y $|G_2|$ son coprimos, entonces φ es trivial.

c. Supongamos que φ es un isomorfismo de grupos. Sea $g \in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2.

d. Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

Ejercicio 3. En cada caso, determinar si existe algún morfismo no trivial $f : G \to K$ (es decir, que no mande todos los elementos al neutro). Cuando exista, construir uno; y si no existe explicar por qué.

a. $G = \mathbb{Z}_7$ con la suma y $K = S_6$ con la composición.

b. $G = \mathbb{Z}_8$, $K = U(24)$. Sugerencia: G es cíclico.

c. $G = U(9)$, $K = \mathbb{Z}_{12}$. Sugerencia: G es cíclico.

d. $G = U(15)$, $K = \mathbb{Z}_6$. Sugerencia: hallar el orden de todos los elementos de G.

Ejercicio 4. En cada caso, determinar si los siguientes grupos son isomorfos. En caso que lo sean, encontrar un isomorfismo entre ellos.

a. Los grupos $(\mathbb{Z}_4, +)$ y $(U(10), \cdot)$.

b. Los grupos D_3 y S_3 (ambos con la composición).

Subgrupos normales y Teoremas de isomorfismos

Ejercicio 5. Sea $f : G \to G'$ un morfismo de grupos. Pruebe que $Ker(f)$ es un subgrupo normal de G. Dar un ejemplo en el cual $Im(f)$ no sea un subgrupo normal de G'.

Ejercicio 6. Sea $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) = 1\}$. Pruebe que $SL_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $GL_n(\mathbb{R})$. Sugerencia: considere $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \ / \ \phi(A) = \det(A)$.

Ejercicio 7. Sea G un grupo, con neutro e_G. Probar que $G/\{e_G\} \simeq G$ y $G/G \simeq \{e_G\}$.

Ejercicio 8. Sea $f : G \to K$ un homomorfismo de grupos sobreyectivo, con K grupo cíclico de orden 10. Recordar que el índice de un subgrupo normal H, se define como la cantidad de elementos de G/H.

- **a**. Pruebe que $G/ker(f)$ tiene orden 10. Es decir: $ker(f)$ es un subgrupo normal de G de índice 10.
- **b**. Construya un homomorfismo $\hat{f} : K \to \hat{K}$ sobreyectivo, para algún grupo $\hat{K}$ de orden 5 a definir. Sugerencia: dado un generador h de K, considere el subgrupo generado por h^2.
- **c**. Usando la parte anterior, pruebe que existe un subgrupo normal de G, de índice 5. Sugerencia: considere el homomorfismo $\tilde{f} : G \to \hat{K}$, tal que: $\tilde{f} = \hat{f} \circ f$.
- **d**. Pruebe que existe un subgrupo normal de G, de índice 2. Sugerencia: razonar como en las partes anteriores.

Ejercicio 9. ¿Cuántos homomorfismos sobreyectivos existen del grupo diedral D_{13} en $\mathbb{Z}_{12}$? Sugerencia: Recordar que el grupo diedral D_n es un grupo de orden $2n$.

Ejercicio 10. Se consideran los siguientes subconjuntos de plano complejo $\mathbb{C}$:

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad H = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}.$$

- **a**. Probar que G y H son subgrupos de $\mathbb{C}$.
- **b**. Probar que $\phi : \mathbb{R} \to G$, dado por $\phi(x) = e^{2\pi i x}$ es un morfismo de grupos sobreyectivo.
- **c**. Probar que G es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
- **d**. Probar que H es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 11. Sea G un grupo con 4 elementos.

- **a**. Probar que G es abeliano.
- **b**. Probar que o bien $G \simeq \mathbb{Z}_4$ o bien $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 12. (Examen Julio 2012)

a. Sea $\phi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos finitos. Probar que se cumple:

$$o(\phi(g)) \mid \operatorname{mcd}(|G_1|, |G_2|), \ \forall \ g \in G_1.$$

b. Hallar todos los homomorfismos $\phi : \mathbb{Z}_2 \to U(8)$.

c. Hallar p primo, sabiendo que existe un homomorfismo no trivial $\phi : \mathbb{Z}_{51} \to \mathbb{Z}_p$, tal que $\phi(\overline{17}) = \overline{0}$.