Teorema Fundamental del Cálculo y métodos de integración

Cálculo diferencial e integral en una variable

1. Introducción

El Teorema Fundamental del Cálculo es, como su nombre lo indica, el resultado central de este curso. Es, además, el motivo por el cual el *cálculo diferencial* y el *cálculo integral* se consideran un único objeto de estudio, e invariablemente se enseñan juntos.

Observemos que, a priori, la integral y la derivada son objetos totalmente diferentes. La integral es un área, y el problema del cálculo de áreas, y la idea de aproximar las áreas a calcular por la suma de áreas de figuras conocidas, ya aparecen en la matemática de la antigua Grecia. Por otra parte, la derivada es históricamente muy posterior. Surgió alrededor del siglo XVII, como herramienta para hallar extremos y rectas tangentes a curvas, y se incorporó a la mecánica clásica como *tasa de cambio* o *velocidad*.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice, por lo tanto, algo sorprendente por lo poco intuitivo: que el problema de derivar y el problema de integrar son esencialmente problemas *inversos*.

Para precisar esta idea, daremos la definición siguiente:

Definición 1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Una primitiva de f es una función derivable $g : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$g' = f.$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que las funciones continuas siempre tienen primitivas, y que estas primitivas se calculan *integrando*.

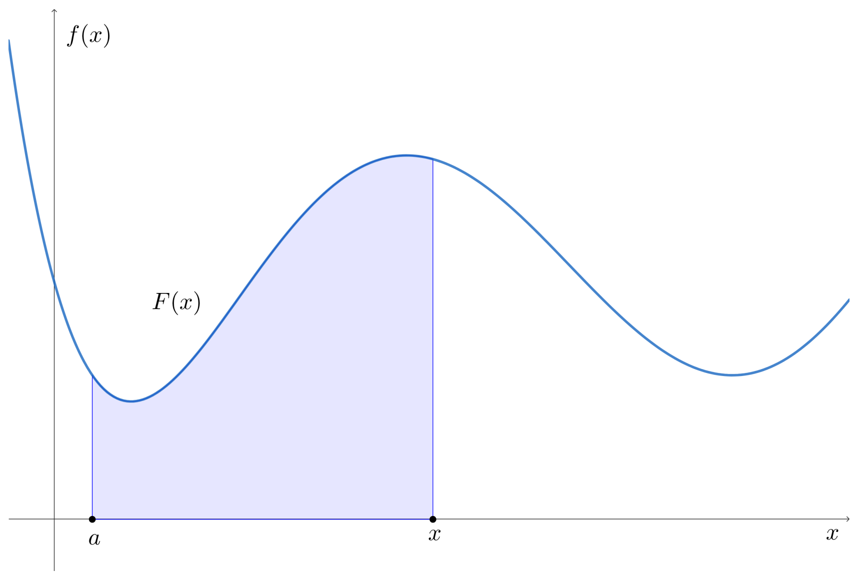
En este capítulo veremos este importante resultado, y una de sus consecuencias más importantes: podemos usar nuestro conocimiento de derivadas para calcular integrales.

2. Teorema Fundamental del Cálculo

2.1. Teorema Fundamental del Cálculo: enunciado y demostración

Cuando tenemos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es integrable, podemos definir una nueva función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por la expresión

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$



La Proposición 106 del capítulo *Límites y continuidad* de las notas de este curso nos dice que la función F es continua.

Ejercicio 1. *Observemos que para definir F es necesario que f sea integrable en $[a, x]$, para todo $x \in [a, b]$. En este ejercicio demostraremos que si f es integrable en $[a, b]$, también es integrable en $[a, x]$ para todo $x \in [a, b]$.*

Para esto, fijemos $x \in [a, b]$ y definamos una nueva función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t < x \\ 0 & \text{si } t \geq x \end{cases}$$

1. *Sea P una partición de $[a, b]$ que contiene al punto x. Probar que $S^*(g, P) - S_*(g, P) \leq S^*(f, P) - S_*(f, P)$.*

2. *Probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que $S^*(g, P) - S_*(g, P) < \varepsilon$. Concluir que g es integrable en $[a, b]$.*

3. *Observar que g es integrable en $[x, b]$, y concluir que es integrable en $[a, x]$.*

4. *Probar que f es integrable en $[a, x]$.*

Ahora veremos que, en los puntos en que f es continua, F es no solo continua sino derivable.

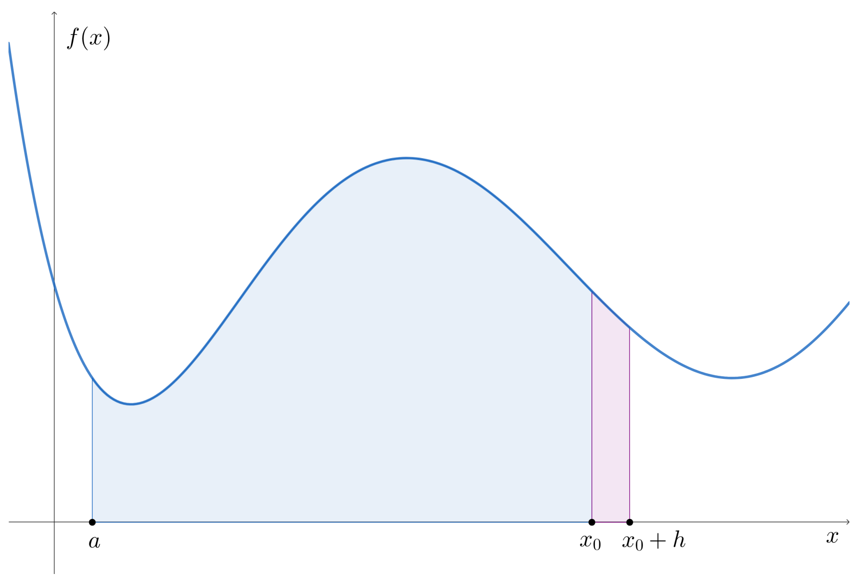
Teorema 1 (Teorema Fundamental del Cálculo, o TFC)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función que es integrable en* $[a, b]$, *y definamos* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Si $x_0 \in [a, b]$ *es un punto en el que* f *es continua, entonces* F *es derivable en* x_0 *y* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demostración.

Calcularemos el cociente incremental de F en el punto x_0.



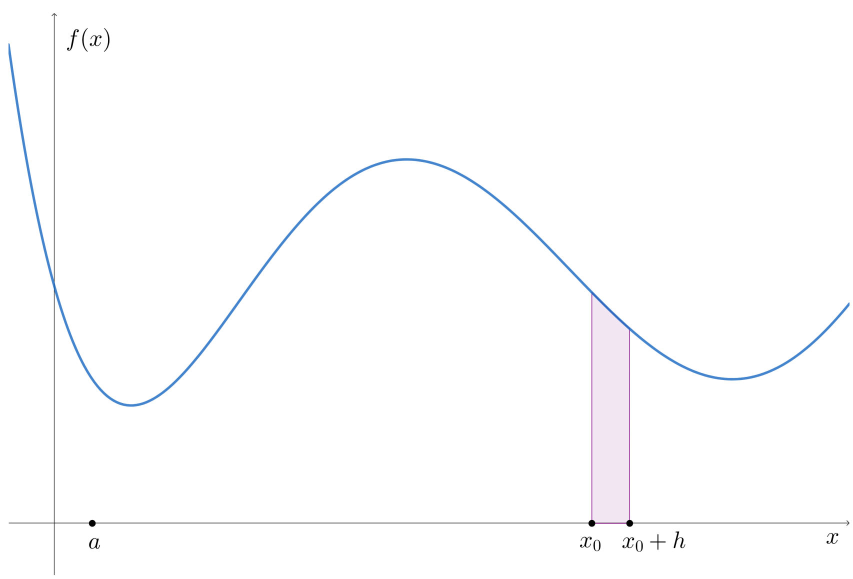
Es

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

En la figura, toda el área pintada es $F(x_0 + h)$ y el área pintada de celeste es $F(x_0)$. La diferencia $F(x_0 + h) - F(x_0)$ es el área rosada.

La derivada es el límite de este cociente incremental, es decir:

$$
\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) + (f(t)-f(x_0))\,dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\right) \\
&= f(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt
\end{aligned}
$$



Para ver que $F'(x_0) = f(x_0)$, solo nos queda probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt = 0. \tag{1}$$

Como f es continua en x_0, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x-x_0| < \delta$. Entonces, si tomamos h con $|h| < \delta$, tendremos que $|f(t)-f(x_0)|$ es menor que ε para t entre x_0 y x_0+h. Por to tanto, para $|h| < \delta$,

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto demuestra 1. $\square$

Observación 1. *Supongamos ahora que I es un intervalo cualquiera, no necesariamente acotado, que $a \in I$ y que $f : I \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, x]$ o en $[x, a]$, según corresponda, para todo $x \in I$.*

Podemos definir $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Como es usual, cuando $x < a$, esto simplemente quiere decir que $F(x) = -\int_x^a f(t)\, dt$.

En este caso, el TFC también nos dice que si $x_0 \in I$ es un punto de continuidad de f, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Veámoslo.

En efecto, cuando $x_0 \geq a$ podemos tomar $b \in I$ tal que $a \leq x_0 \leq b$ y aplicar el Teorema 1 a f en $[a, b]$. Cuando $x_0 < a$, podemos tomar $b \in I$ tal que $b \leq x_0 \leq a$ y aplicar el Teorema 1 a f en $[b, a]$. Nos dice que si $G : [b, a] \to \mathbb{R}$ está dada por $G(x) = \int_b^x f(t)\, dt$, entonces $G'(x_0) = f(x_0)$. Pero

$$G(x) = \int_b^a f(t)\, dt + F(x),$$

y como $\int_a^b f(t)\, dt \in \mathbb{R}$ (es decir, no depende de x), $F'(x_0) = G'(x_0)$.

Corolario 1. *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f tiene una primitiva en I.*

El corolario anterior nos dice que las funciones continuas tienen primitiva. Pero... ¿hay funciones que no tengan primitiva? ¿Podremos conocer alguna?
Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, es decir, que g es derivable y $g' = f$. Como g es derivable, es una función continua. Sumándole a g una constante, no modificamos su derivada y podemos suponer que $g(0) = 0$.
Si $a < 0$, podemos aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange a g en $[a, 0]$, y obtenemos $c \in (a, 0)$ tal que

$$\frac{g(0) - g(a)}{0 - a} = g'(c) = f(c) = 0,$$

por lo que $g(a) = 0$. Es decir, g vale 0 en $(-\infty, 0)$.
Si $b > 0$, podemos aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange a g en $[0, b]$, y obtenemos $c \in (0, b)$ tal que

$$\frac{g(b) - g(0)}{b - 0} = g'(c) = f(c) = 1,$$

por lo que $g(b) = b$. Es decir, g es la función identidad en $(0, +\infty)$.
Es decir,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como g es continua en 0, $g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ y

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¡Pero esta función no puede ser la primitiva de f, porque no es una función derivable!
Esto demuestra que f, en realidad, no tiene primitiva.

2.2. Primitivas de una función

Tomemos ahora una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I, que puede ser un intervalo acotado o no acotado.

El Teorema Fundamental del Cálculo no nos da solo una primitiva de f. En general, nos da infinitas. Esto es porque si $a, a' \in I$ son dos puntos distintos, las funciones dadas por

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \;\text{ y }\; F_{a'}(x) = \int_{a'}^x f(t)\,dt$$

son ambas primitivas de f, y en general no son iguales porque

$$F_a(x) - F_{a'}(x) = \int_a^{a'} f(t)\,dt.$$

Ejemplo 1. *Dos primitivas de la función identidad.*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$, las funciones $F_0(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$ y $F_1(x) = \int_1^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ son dos primitivas diferentes de f.

Cualquier función de la forma $g(x) = \frac{x^2}{2} + k$, con $k \in \mathbb{R}$, será también una primitiva de f.

Volvamos a pensar en una función continua cualquiera f definida en un intervalo I. Como habíamos dicho, el TFC nos da, para cada $a \in I$, una primitiva F_a. Si elegimos otro punto a', obtenemos otra primitiva que difiere de la anterior en una constante.

Aquí surge una pregunta natural: *¿habrá otras primitivas de f, que no se obtengan sumando una constante a F_a?* Como veremos a continuación, la respuesta es *no*.

Proposición 1. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Si g y h son dos primitivas de f, entonces $g - h$ es constante.*

Vamos primero a probar un lema, que es en realidad un caso particular de la Proposición 1.

Lema 1. *Si $g : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en un intervalo I tal que $g' = 0$, entonces g es constante.*

Demostración del Lema 1.

Sean a y b dos puntos de I; tenemos que probar que $g(a) = g(b)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b$. Aplicando el Teorema del valor medio de Lagrange a la función g en el intervalo $[a, b]$, tenemos que existe $c \in (a, b)$ para el cual

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

Como $g'(c) = 0$, esto nos dice que $g(b) - g(a) = 0$, es decir, que $g(b) = g(a)$.$\square$

Notación

Una notación muy usual es la llamada *notación de Leibniz* para las primitivas, que explicaremos en este recuadro.

Cuando se escribe

$$g(x) = \int f(x)\,dx$$

eso quiere decir "la función g es una primitiva de la función f".

Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}(x) = \int \cos(x)\,dx.$$

Observemos que esto no es una igualdad de funciones, porque hay muchas primitvas de f.[a]

Otra notación usual es

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C,$$

y eso se lee "la familia de las primitivas de f es el conjunto de las funciones de la forma $g + C$, donde c es una constante".

Por ejemplo,

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C.$$

[a]La notación de Leibniz, si bien es muy usual, no es muy "correcta" para los estándares de escritura de la matemática moderna. Normalmente al escribir el signo de igual (=), lo que está a su izquierda es igual a lo que está a su derecha. Por ejemplo, la expresión "$2+2=4$", que es una igualdad *entre números*, dice que el número $2+2$ es igual al número 4. En particular, si a la izquierda del signo "=" hay un número, a la derecha tiene que haber también un número. Del mismo modo, si a la izquierda del signo "=" hay una función, a la derecha tendría que haber también una función. La notación de Leibniz no debe leerse de este modo.

Demostración de la Proposición 1:

Como g y h son dos primitivas de f, tenemos que $(g-h)' = g'-h' = f-f = 0$. Por lo tanto, el Lema 1 nos dice que $g - h$ es constante.$\square$

2.3. Derivada de funciones dadas por expresiones integrales

Ejemplo 2. *Aplicación directa del TFC.*

Consideremos la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\,dt.$$

La derivada de F es $F'(x) = x^2 \cos(x^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(x)}$. Ahora consideremos G :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_1^x t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

Su derivada también es $G'(x) = x^2 \cos(x^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(x)}$. De hecho, F y G difieren en una constante, ya que

$$F(x) = \int_0^1 t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt + G(x).$$

Ejemplo 3.

Ahora consideremos la siguiente modificación del ejemplo anterior. Definamos la función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$H(x) = \int_x^0 t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

Como $H(x) = -F(x)$, su derivada es $H'(x) = -F'(x) = -x^2 \cos(x^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(x)}$.

Ejemplo 4. *Función dada por una expresión integral con otros límites de integración.*

Ahora definamos $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$J(x) = \int_0^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

El TFC, por sí mismo, no nos dice que esta función sea derivable ni nos da la derivada de esta función. Sin embargo, observemos que $J(x) = F(x^2)$. Es decir, J es la composición de F y la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. Por la Regla de la Cadena, J es derivable y su derivada vale

$$J'(x) = F'(g(x))g'(x) = F'(x^2)2x = (x^4 \cos(x^6 - 1) e^{-\operatorname{sen}(x^2)})2x.$$

Ejemplo 5.

Un último ejemplo antes de ver un resultado general. Tomemos $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$K(x) = \int_{e^{-x}}^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

Escribimos a esta función como

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt + \int_{e^{-x}}^0 t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt \\ &= \int_0^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt - \int_0^{e^{-x}} t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Si tomamos las funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = x^2$ y $h(x) = e^{-x}$, la función K nos queda

$$K(x) = F \circ g(x) - F \circ h(x),$$

siendo F, como hasta ahora, la función del Ejemplo 2.

La derivada de K es, por la Regla de la Cadena y el TFC,

$$\begin{aligned} K'(x) &= F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) \\ &= (x^4 \cos(x^6 - 1)e^{-\mathrm{sen}(x^2)})2x - (e^{-2x} \cos(e^{-3x-1})e^{-\mathrm{sen}(e^{-2x})})(-e^{-x}). \end{aligned}$$

Proposición 2. *Sean I y J intervalos, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y $g, h : J \to I$ funciones derivables. Consideremos la función $K : J \to \mathbb{R}$ dada por*

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt.$$

La función F es derivable y su derivada está dada por

$$K'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

Ejercicio 2. *Demostrar la Proposición 2 usando el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena.*

3. Métodos de integración

3.1. Regla de Barrow

Ahora veremos cómo a partir del Teorema Fundamental del Cálculo surgen los llamados "métodos de integración". Éstos consisten en usar las propiedades de la derivación para calcular primitivas e integrales de funciones continuas. Se basan en una consecuencia sencilla pero importante del TFC, conocida como la Regla de Barrow.

Teorema 2 (Regla de Barrow)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I, a y b dos puntos de I y $g : I \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a).$$

Demostración de la Regla de Barrow:

Consideremos la función $F : I \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Entonces, por definición, $\int_a^b f(t)\, dt = F(b)$. Como $F(a) = 0$,

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Las funciones F y g son dos primitivas de f, y de acuerdo a la Proposición 1, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = g(x) + k$, para todo $x \in I$. Entonces $F(b) - F(a) = g(b) + k - g(a) - k = g(b) - g(a)$, y por lo tanto

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a). \ \square$$

Notación

$$g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Ejemplo 6.

Como la derivada de la función seno es la función coseno, tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1.$$

3.2. Integración por partes

El primer método de integración que veremos es el *método de integración por partes*. Viene de una propiedad importante de las derivadas que ya conocemos, la *fórmula de la derivada del producto*, que nos dice que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Teorema 3 (Integración por partes)**.** *Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo I, derivables y con derivadas continuas. Entonces:*

1. $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dt$
2. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

Observemos que este teorema nos dice dos cosas: cómo calcular la *integral* de $f'g$ en un intervalo y cómo calcular una *primitiva* de la función $f'g$.

Observación 2. *Recordemos cómo se usa la notación $\int h(x)\,dx$. Cuando escribimos $H(x) = \int h(x)\,dx$, estamos diciendo que H es una primitiva de h. Equivalentemente, que $H' = h$.*

Demostración del Teorema 3:

Sabemos que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b (fg)'(x)\,dx &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx\\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x))\,dx.\end{aligned}$$

Usando la Regla de Barrow, sabemos que $\int_a^b (fg)'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$, por lo que

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx, \tag{2}$$

que es lo que dice *1*.

Como esto es cierto para $a, b \in I$ cualesquiera, vamos a reescribir la ecuación (2) cambiando la notación ligeramente:

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt + \int_a^x f(t)g'(t)\,dt, \tag{3}$$

es decir,

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,dt = f(x)g(x) - \int_a^x f(t)g'(t)\,dt - f(a)g(a). \tag{4}$$

Por el TFC, la expresión $F(x) = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$ da una primitiva de $f'g$ y la expresión $G(x) = \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$ da una primitiva de fg'. Como $f(a)g(a)$ es una constante, $G(x) + f(a)g(a)$ también es una primitiva de fg'. Por lo tanto, la ecuación 4 dice que la resta de fg y una primitiva de fg' es una primitiva de $f'g$, es decir,

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx. \ \square$$

Veamos ahora algunos ejemplos de uso de la integración por partes.

Ejemplo 7. $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Para calcular $\int_0^1 xe^x\,dx$, aplicaremos el Teorema 3 a las funciones f y g dadas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$. Observemos que $f'(x)g(x) = e^x x$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 f'(x)g(x)\,dx \\ &= f(x)g(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \\ &= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx \\ &= xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

Ejemplo 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx$.

Tomaremos $f(x) = g(x) = \mathrm{sen}(x)$, con lo cual $f'(x)g(x) = \cos(x)\mathrm{sen}(x)$. Tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx = \mathrm{sen}^2(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx.$$

¡Llegamos a la misma integral que al principio! Pero de esta igualdad, podemos despejarla, y obtenemos

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx = \mathrm{sen}^2(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

por lo que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 9. $\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx$.

Este ejemplo es similar al anterior, pero en vez de calcular una integral vamos a hallar *una* primitiva de la función $\mathrm{sen}^2(x)$. Cualquier otra primitiva se puede obtener a partir de esta sumando una constante.

Tomaremos $f(x) = -\cos(x)$ y $g(x) = \mathrm{sen}(x)$.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx &= -\cos(x)\mathrm{sen}(x) + \int \cos^2(x)\,dx \\ &= -\cos(x)\mathrm{sen}(x) + \int (1 - \mathrm{sen}^2(x))\,dx \\ &= -\cos(x)\mathrm{sen}(x) + x - \int \mathrm{sen}^2(x)\,dx\end{aligned}$$

Nuevamente podemos despejar, obteniendo

$$\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx = \frac{x - \cos(x)\mathrm{sen}(x)}{2}.$$

Ejercicio 3. *Hallar una primitiva de* $\cos^2(x)$*, y calcular* $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$.

Ejemplo 10. *Primitiva del logaritmo.*

Definimos $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Por el TFC, sabemos que la derivada de $\log(x)$ es $\frac{1}{x}$. Ahora calcularemos una primitiva de $\log(x)$. Para esto, aplicaremos el Teorema 3 a las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \log(x)$.

$$\begin{aligned} \int \log(x)\,dx &= \int 1 \cdot \log(x)\,dx \\ &= x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\log(x) - \int 1\,dx = x(\log(x) - 1). \end{aligned}$$

3.3. Integración por sustitución o cambio de variable

El segundo método de integración que veremos es el *método de integración por sustitución* o *cambio de variable*. Viene de una propiedad importante de las derivadas que ya conocemos, la *regla de la cadena*, que nos dice que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Teorema 4 (Cambio de variable)**.** *Sean* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b)*, y* f *una función que es continua en el intervalo cerrado delimitado por* $g(a)$ *y* $g(b)$.[a] *Entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ g(x))g'(x)\,dx.$$

[a] Es decir, el intervalo $[g(a), g(b)]$ o $[g(b), g(a)]$, según si $g(a) \leq g(b)$ o $g(a) > g(b)$.

Demostración del Teorema 4:

Sea I el intervalo cerrado delimitado por $g(a)$ y $g(b)$. Como f es continua en I, tiene una primitiva que llamaremos F. Entonces, por la regla de Barrow,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = F \circ g(b) - F \circ g(a).$$

Por otro lado, la regla de la cadena nos dice que

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = (f \circ g(x))g'(x)$$

para $x \in I$. Usando nuevamente la regla de Barrow tenemos que

$$\int_a^b (f \circ g(x))g'(x)\,dx = F \circ g(b) - F \circ g(a). \ \square$$

Veamos ahora algunos ejemplos del uso de este resultado.

Ejemplo 11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\, dx$.

Esta integral ya fue calculada en el Ejemplo 9 usando el método de integración por partes, por lo que ya sabemos que vale $\frac{1}{2}$.

Para aplicar el teorema de cambio de variable, tomemos $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \mathrm{sen}(x)$, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Entonces $f \circ g(x) = g(x) = \mathrm{sen}(x)$. Como $g'(x) = \cos(x)$, la función que queremos integrar es $(f \circ g)g'$. El Teorema 4 nos dice que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\, dx$ es igual a

$$\int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x)\, dx,$$

es decir, a

$$\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}^n(x)\, dx$, *donde* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Aquí nuevamente podemos tomar $g(x) = \mathrm{sen}(x)$, cuya derivada es $g'(x) = \cos(x)$. Como ahora en el integrando $\mathrm{sen}(x)$ aparece elevado a la potencia n, tomaremos $f(x) = x^n$. La función que queremos integrar es por lo tanto $(f \circ g)g'$.

Por el teorema de cambio de variable, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}^n(x)\, dx$ es igual a

$$\int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x)\, dx,$$

es decir, a

$$\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ejemplo 13. *Primitiva de* $h(x) = \cos(x)\mathrm{sen}^3(x)$.

Tomemos la función del ejemplo anterior en el caso particular en que $n = 3$. Si en vez de querer hallar su integral en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ queremos hallar una primitiva, podemos calcular $F(x) = \int_0^x h(t)\, dt$ (o en realidad $\int_a^x h(t)\, dt$ para cualquier valor de a).

Eligiendo $f(x) = x^3$ y $g(x) = \mathrm{sen}(x)$, tenemos que

$$F(x) = \int_0^x \cos(t)\mathrm{sen}^3(t)\, dt = \int_{g(0)}^{g(x)} t^3\, dt = \int_0^{\mathrm{sen}(x)} t^3\, dt.$$

Es decir,

$$F(x) = \frac{\mathrm{sen}^4(x)}{4}.$$

Ejercicio 4. *Verificar, derivando, que F efectivamente es una primitiva de la función h.*

Ejemplo 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}\,dx$.

Para calcular esta integral tomaremos de nuevo $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, y la función f será $f(x) = e^x$. La integral que queremos calcular, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}\,dx$, queda en este caso igual a

$$\int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$$

Notación

Los ejemplos anteriores tienen en común que en el integrando aparece una expresión que depende de $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ (que es $\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{sen}^n(x)$ o $e^{\operatorname{sen}(x)}$) multiplicada por $g'(x) = \cos(x)$. Sin importar cuál sea la función continua f y cuáles sean los límites de integración a y b,

$$\int_a^b \cos(x)f(\operatorname{sen}(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

Por este motivo, al aplicar el teorema de cambio de variable suele utilizarse una notación diferente a la presentada en estos ejemplos. Solemos decir que la *nueva variable* es $u = \operatorname{sen}(x)$, y que $du = \cos(x)\,dx$. Entonces escribimos

$$\int_a^b \cos(x)f(\operatorname{sen}(x))\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

La expresión $du = \cos(x)\,dx$ es solamente una notación, pero es muy útil para recordar que al hacer el cambio de variable que consiste en cambiar $\operatorname{sen}(x)$ por u, no podemos simplemente cambiar dx por du.

Ejemplo 15. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Para aplicar el teorema de cambio de variable, busquemos una nueva variable u (correspondiente a $u = g(x)$) de modo que du (es decir, $g'(x)dx$) aparezca también en el integrando.

Si tomáramos $u = \sqrt{x}$, tendríamos $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Modifiquemos ligeramente el aspecto de nuestra integral:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Ahora sí estamos en condiciones de hacer el cambio de variable $u = \sqrt{x}$. ¡Recordemos que hay que cambiar los límites de integración! Cuando $x = 1$, $u = 1$

y cuando $x = 4$, $u = 2$. Por lo tanto

$$2\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^2 e^u\,du = 2(e^2 - e).$$

Ejemplo 16. *Cálculo de una primitiva de* $h(x) = \frac{\cos(log(1+x))}{1+x}$.

Calcularemos $F(x) = \int_0^x \frac{\cos(\log(1+t))}{1+t}\,dt$, que está definida para $x \in (-1, +\infty)$ y es una primitiva de h. Haremos el cambio de variable $u = \log(1+t)$, para el cual $du = \frac{1}{1+t}dt$. Con este cambio de variable,

$$F(x) = \int_0^{\log(1+x)} \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u)\Big|_0^{\log(1+x)} = \operatorname{sen}(\log(1+x)).$$

Ejemplo 17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(2x)\,dx$.

Para resolver esta integral aplicaremos los dos métodos de integración que hemos visto hasta el momento: integración por partes y cambio de variable.

Primero haremos el cambio $u = 2x$. Como $du = 2dx$, reescribimos la integral que queremos calcular como

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x}\cos(2x)\,dx,$$

que tras el cambio de variable queda

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^u\cos(u)\,du.$$

Integremos ahora por partes, primitivizando el coseno y derivando la exponencial:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^u\cos(u)\,du &= e^u\operatorname{sen}(u)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^u\operatorname{sen}(u)\,du\\ &= -\int_0^{\pi} e^u\operatorname{sen}(u)\,du.\end{aligned}$$

Haciendo partes nuevamente, primitivizando el seno y derivando la exponencial, tenemos que esto es igual a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^u(-\operatorname{sen}(u))\,du &= e^u cos(u)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^u\cos(u)\,du\\ &= -e^{\pi} - 1 - \int_0^{\pi} e^u\cos(u)\,du.\end{aligned}$$

De las dos ecuaciones anteriores podemos despejar

$$\int_0^\pi e^u \cos(u)\, du = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1),$$

por lo que

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi e^u \cos(u)\, du = -\frac{1}{4}(e^\pi + 1).$$

Hasta ahora hemos visto ejemplos en los que la función $u = g(x)$ aparece explícitamente en el integrando. Sin embargo, el teorema de cambio de variable puede ser aplicado, con cierta astucia, en otros casos.

Ejemplo 18. *Área del círculo.*

Calcularemos $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$, que es el área del semicírculo de radio 1. ¡Nos debería dar $\frac{\pi}{2}$! Haremos un pequeño cambio cosmético, que es cambiar el nombre de la variable de integración de x a u. Entonces, la integral queda:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\, du.$$

Si u fuera $\operatorname{sen}(x)$, tendríamos que $\sqrt{1-u^2} = \cos(x)$. Intentemos hacer este cambio de variable. Para ello, debemos tener en cuenta que $du = \cos(x)dx$. Entonces,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\, du = \int_a^b \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)\, dx,$$

para límites de integración a y b elegidos apropiadamente. Éstos deben cumplir que $\operatorname{sen}(a) = -1$ y $\operatorname{sen}(b) = 1$, así que podemos tomar $a = -\frac{\pi}{2}$ y $b = \frac{\pi}{2}$.

La integral que queremos calcular queda

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\, du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, dx.$$

Ejercicio 5. *Calcular esta integral usando el método de integración por partes, verificando así que efectivamente da $\frac{\pi}{2}$.*

Ejercicio 6. *El* coseno hiperbólico *y el* seno hiperbólico *son las funciones definidas por*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad y \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Probar que:

- $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1.$
- $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x).$
- $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x).$

- $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es biyectiva.*

La función inversa de senh *se llama* arcsenh*, que se lee* arcosenohiperbólico.

Ejemplo 19. *Primitiva de* $\sqrt{1+x^2}$.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. De acuerdo al TFC, una primitiva de f está dada por

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt.$$

Para hallar F, haremos el cambio de variable $t = \operatorname{senh}(u)$, con lo que $dt = \cosh(u)du$. Al hacer este cambio de variable, los límites de integración cambiarán. En vez de ser 0 y x serán $\operatorname{arcsenh}(0) = 0$ y $\operatorname{arcsenh}(x)$. Usaremos en los siguientes cálculos las propiedades de cosh y senh que constituyen el enunciado del ejercicio anterior.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt &= \int_0^{\operatorname{arcsenh}(x)} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(u)}\cosh(u)\, du \\ &= \int_0^{\operatorname{arcsenh}(x)} \cosh^2(u)\, du \end{aligned}$$

Integrando por partes, o usando la fórmula de cosh, esta integral es igual a

$$\frac{1}{2}(\operatorname{senh}(u)\cosh(u) + u)\Big|_0^{\operatorname{arcsenh}(x)},$$

y tras evaluar obtenemos

$$F(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsenh}(x)}{2}.$$

3.4. Integración de funciones racionales

Una *función racional* es una función dada por un cociente de funciones polinómicas, es decir, una función de la forma

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios. Hay un método general que permite hallar sus primitivas. Esto es lo que veremos en esta sección.

Comenzaremos recordando algunas propiedades de los polinomios a coeficientes reales. Llamaremos $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de los polinomios a coeficientes reales, es decir, a las expresiones de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^x,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Si $a_n \neq 0$ decimos que p tiene *grado* n. Los números reales $a_0, \ldots, a_n$ son los *coeficientes* de p.

Siempre que hablemos de un *polinomio* éste tendrá coeficientes reales. Es decir, siempre estaremos hablando de un elemento de $\mathbb{R}[x]$.

División de polinomios

Si p y q son polinomios, existen polinomios c y r tales que

$$p = cq + r,$$

y el grado de r es menor al grado de q. Al expresar p de este modo, decimos que dividimos a p entre q. El polinomio p se llama el dividendo, q es el divisor, c es el cociente y r es el resto.

Observemos que si el grado de p es menor al de q, quedan $c = 0$ y $r = p$. Por lo tanto la división solo resulta interesante si el grado del dividendo es mayor al del divisor.

Por ejemplo, si $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1$ y $q(x) = x^3 - x$, tenemos que

$$p(x) = (x^2 + x + 3)q(x) + x^2 - x + 1.$$

En este caso $c(x) = x^2 + x + 3$ y $r(x) = x^2 - x + 1$.[1]

Descomposición de polinomios como producto de polinomios irreducibles

Un polinomio de grado n es *irreducible* si no puede descomponerse como producto de polinomios de grado menor. Los polinomios de grado 1 son irreducibles, y hay polinomios irreducibles de grado 2, como por ejemplo $x^2 + 1$.

En $\mathbb{R}[x]$, no hay polinomios irreducibles de grado mayor que 2.

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, puede descomponerse como producto de polinomios irreducibles.

Por ejemplo, el polinomio

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

[1] Si no recuerdan cómo dividir polinomios, pueden por supuesto recurrir a *youtube*. Sin embargo, es un ejercicio provechoso recordar cómo es la división entera y tratar de hacer un razonamiento similar con los polinomios. Es decir, recordando lo que quiere decir

$$\begin{array}{r|l} 1538 & 23 \\ \cline{2-2} 20 & 66 \end{array}$$

pueden plantear

$$\begin{array}{r|l} x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1 & x^3 - x \\ \cline{2-2} \end{array}$$

e intentar hacer este cálculo guiados por su intuición.

se descompone como

$$p(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1).$$

El polinomio

$$q(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

es

$$q(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2+1).$$

Observemos que q tiene los mismos factores irreducibles que p, pero en q el factor $x-1$ aparece dos veces.

El objetivo de esta sección es integrar *funciones racionales*, es decir, funciones que son cocientes de funciones polinómicas. Antes de integrarlas, es conveniente expresarlas de la forma más simple posible.

Por ejemplo, la función racional

$$R_0(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}$$

es el cociente $\frac{q(x)}{p(x)}$, donde p y q son los polinomios que acabamos de descomponer en factores irreducibles. Por lo tanto

$$R_0(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} = x - 1.$$

Si tomamos ahora $\frac{p(x)}{q(x)}$, obtenemos

$$R_1(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-1}.$$

Ambas son funciones que sabemos integrar, cuando las escribimos en la forma apropiada.

Ejemplo 20. *Función racional con numerador de mayor grado que el denominador.*

Si

$$R(x) = \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1}{x^3 - x},$$

el numerador de R es $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1$ y el denominador es $q(x) = x^3 - x$. Como el grado de p es mayor que el de q, es conveniente dividir p entre q, lo que nos da

$$p(x) = (x^2 + x + 3)q(x) + x^2 - x + 1.$$

Ahora podemos expresar R como

$$R(x) = \frac{(x^2 + x + 3)(x^3 - x) + x^2 - x + 1}{x^3 - x} = x^2 + x + 3 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x},$$

que es la suma de un polinomio y una función racional de grado más pequeño.

Si además descomponemos q en sus factores irreducibles, vemos que

$$R(x) = x^2 + x + 3 + \frac{x^2 - x + 1}{x(x+1)(x-1)}.$$

Enseguida veremos por qué esto es útil, pero primero registremos esta observación:

Observación 3. *Si $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional y el grado de p es mayor o igual al grado de q, dividiendo p entre q podemos reescribir R como*

$$R(x) = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde c y r son polinomios y el grado de r es menor que el de q.

Por lo tanto, para integrar funciones racionales es suficiente saber integrar funciones para las cuales el numerador tiene grado menor que el denominador.

Teorema 5 (Descomposición en fracciones simples)**.** *Sean p y q polinomios de coeficientes reales tales que el grado de p es menor que el de q. Consideremos la descomposición de q en factores irreducibles,*

$$q(x) = r_1(x)^{n_1} \cdots r_t^{n_t} s_1^{m_1} \cdots s_u^{m^u},$$

donde $r_1, \dots, r_t$ son los factores irreducibles de grado 1 y $s_1, \dots, s_u$ son los factores irreducibles de grado 2. Entonces, la función racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

se descompone en $n_1 + \cdots + n_t + m_1 + \cdots + m_u$ sumandos, que son de la forma

$$\frac{a}{r_i(x)^k},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $1 \leq k \leq n_i$, o de la forma

$$\frac{bx + c}{s_i(x)^k},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $1 \leq k \leq m_i$.

Veamos qué quiere decir esto en la práctica.

Ejemplo 21. *Denominador $q(x) = (x+2)(x-1)(x-5)$.*

El denominador se descompone como producto de polinomios irreducibles de grado 1, y ningún factor está repetido. En este caso,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{(x+5)},$$

donde a_1, a_2 y a_3 son números reales que dependen, por supuesto, de quién sea p.

Ejemplo 22. *Denominador* $q(x) = (x+2)(x-1)(x-5)^3$.

En este caso, el denominador se descompone como producto de polinomios irreducibles de grado 1, y el tercer factor aparece tres veces. Esto se verá reflejado en la descomposición en fracciones simples de la forma siguiente:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{(x+5)} + \frac{a_4}{(x+5)^2} + \frac{a_5}{(x+5)^3},$$

donde $a_1, \ldots, a_5$ son números reales que dependen, por supuesto, de quién sea p.

Ejemplo 23. *Denominador* $q(x) = (x+3)(x^2+1)$.

En este caso, en la descomposición en fracciones simples hay dos sumandos, uno por cada factor irreducible de q. Tiene la forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{x+3} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Ejemplo 24. *Denominador* $q(x) = (x+3)^2(x^2+1)^3$.

Este polinomio tiene los mismos factores irreducibles que el del ejemplo anterior, pero cada uno aparece varias veces. En la descomposición en fracciones simples de $\frac{p(x)}{q(x)}$ hay ahora 5 sumandos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x+3} + \frac{a_2}{(x+3)^2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2} + \frac{b_3x+c_3}{(x^2+1)^3}.$$

El objetivo de este curso no es aprender a integrar todos los sumandos que pueden aparecer en la descomposición en fracciones simples. Esto puede hacerse, y hay métodos generales que permiten hacerlo en todos los casos. Por lo tanto, si tuviéramos que integrar una función racional *cualquiera*, podríamos hacerlo[2], siempre y cuando lográramos descomponer su denominador como producto de polinomos irreducibles[3].

[2] Es laborioso pero fácil.

[3] ¡Esto no siempre es fácil!

Volvamos al Ejemplo 23, donde la descomposición en fracciones simples que se obtiene nos queda así:

$$\frac{a}{x+3} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Esta función es

$$a\frac{1}{x+3} + b\frac{x}{x^2+1} + c\frac{1}{x^2+1},$$

donde, recordemos, a, b y c son números reales.

Por lo tanto, para integrarla, alcanza con conocer:

- Una primitiva de $\frac{1}{x+3}$.
- Una primitiva de $\frac{x}{x^2+1}$.
- Una primitiva de $\frac{1}{x^2+1}$.

Ejercicio 7.

- *Una primitiva de* $\frac{1}{x+3}$ *es* $\log(x+3)$. *Se obtiene aplicando el teorema de cambio de variable, tomando como nueva variable* $u = x+3$.
- *Una primitiva de* $\frac{x}{x^2+1}$ *es* $\frac{1}{2}\log(x^2+1)$. *Se obtiene aplicando el teorema de cambio de variable, tomando como nueva variable* $u = x^2+1$.
- *Una primitiva de* $\frac{1}{x^2+1}$ *es la función arcotangente. Se obtiene a partir del teorema de la función inversa, aplicándolo a la función* $\tan$.

Ejemplo 25. *Primitiva de* $\frac{1}{x^2-2x+5}$.

El polinomio $q(x) = x^2 - 2x + 5$ es irreducible. Sabemos esto porque, si pudiera ser descompuesto como $(x-a)(x-b)$, a y b serían raíces de q, y q no tiene raíces reales.

¿Cómo podemos calcular una primitiva de $\frac{1}{q(x)}$? Conocemos la primitiva de $\frac{1}{x^2+1}$ que es $\arctan(x)$, y haremos manipulaciones algebraicas sobre la expresión $\frac{1}{q(x)}$ para llevarla a algo de este tipo.

Recordemos que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$. Entonces los dos primeros sumandos de $q(x)$, que son

$$x^2 - 2x,$$

forman parte de un cuadrado de binomio de este tipo. Es decir,

$$x^2 - 2x + \underline{\quad} = (x+\alpha)^2,$$

si elegimos α y completamos el espacio en blanco adecuadamente. Como 2α debe ser igual a -2, $\alpha = -1$, y la igualdad anterior es

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Entonces

$$q(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4.$$

Lo que *sabemos* integrar es $\frac{1}{x^2+1}$. Lo que *queremos* integrar es $\frac{1}{(x-1)^2+4}$. Estas expresiones se empiezan a parecer...

Si además, en $q(x)$, sacamos 4 de factor común, tenemos que

$$q(x) = 4\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

y por lo tanto $\frac{1}{q(x)}$ nos queda

$$\frac{1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}.$$

Esto ya se parece bastante a $\frac{1}{x^2+1}$, ¿no?

Calculemos

$$\int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}\,dx.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x-1}{2}$, tenemos que $du = \frac{1}{2}$ y la primitiva que estamos calculando es

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{u^2+1}\,du,$$

que es $\frac{1}{2}\arctan(u)$. No olvidemos deshacer el cambio de variable. Hemos llegado a que

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

¿Será posible hacer esto mismo para una función racional de la forma $\frac{1}{q(x)}$, donde q es cualquier polinomio irreducible de grado 2? Sí, por supuesto que sí.[4]

[4]Nos alcanza con hacerlo para los polinomios *mónicos*, es decir, cuyo coeficiente principal es 1.

Ejercicio 8. *Tomemos un polinomio $q(x) = x^2+bx+c$ sin raíces reales, es decir, tal que $b^2 - 4c < 0$.*

1. *Completar cuadrados: hallar α y β reales tales que*

$$q(x) = (x - \alpha)^2 + \beta.$$

Verificar que $\beta > 0$.[a]

2. *Sacando β de factor común, podemos escribir*

$$q(x) = \beta \left(\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}} \right)^2 + 1 \right).$$

Hallar una primitiva de $\frac{1}{q(x)}$ haciendo un cambio de variable apropiado.

[a]Queda $\alpha = \frac{b}{2}$ y $\beta = c - \alpha^2$.

Hasta ahora, hemos visto cómo el teorema de descomposición en fracciones simples nos permite escribir una función racional como em suma de términos que sabemos integrar y términos que aprenderíamos a integrar, si tuviéramos que hacerlo.[5] Pero...¿cómo encontramos la descomposición en fracciones simples? Lo veremos en algunos ejemplos.

Ejemplo 26.

$$R(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$$

Buscamos números A y B tales que

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}. \tag{5}$$

Hagamos denominador común en la expresión de la derecha. La ecuación (5) queda

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}. \tag{6}$$

Para que se cumpla, como las funciones racionales a la izquierda y a la derecha de (6) tienen el mismo denominador, alcanza con que

$$1 = A(x-1) + B(x+2) = (A+B)x + (2B - A). \tag{7}$$

Observemos que esta igualdad tiene que cumplirse para todos los $x \in \mathbb{R}$, es decir, la función polinómica dada por $(A + B)x + (2B - A)$ tiene que ser constante

[5]Como por ejemplo, $\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}$.

igual a 1. Por lo tanto, el término lineal tiene que tener coeficiente 0 y el término independiente tiene que valer 1. Hallamos A y B resolviendo el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -A + 2B &= 1, \end{aligned}$$

y obtenemos $A = -1/3$, $B = 1/3$. Es decir,

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{-1/3}{x+2} + \frac{1/3}{x-1}.$$

Ejemplo 27.

$$R(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)(x-5)}$$

Buscamos números A, B y C tales que

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}. \tag{8}$$

Hagamos denominador común en la expresión de la derecha. La ecuación (8) queda

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A(x-1)(x-5) + B(x+2)(x-5) + C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-5)}. \tag{9}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, para hallar A, B y C igualamos los numeradores, obteniendo

$$1 = (A + B + C)x^2 + (-6A - 3B + C)x + (5A - 10B - 2C). \tag{10}$$

A, B y C se obtienen como solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -6A - 3B + C &= 0 \\ 5A - 10B - 2C &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 28.

$$R(x) = \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)(x+5)}$$

Queremos hallar A, B y C tales que

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}.$$

Haciendo denominador común en la expresión de la derecha e igualando los numeradores que nos quedan, obtenemos

$$2x + 3 = (A + B + C)x^2 + (-6A - 3B + C)x + (5A - 10B - 2C).$$

Por lo tanto, A, B y C se obtienen como solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -6A-3B+C &= 2 \\ 5A-10B-2C &= 3 \end{aligned}$$

Método de la tapadita

Hay un "método"para hallar rápidamente los coeficientes que aparecen en la descomposición en fracciones simples. Para entenderlo, miremos la ecuación (5), que es una igualdad de funciones racionales. Si multiplicamos a ambos lados por $(x-1)$, obtenemos

$$\frac{1}{x+2} = \frac{A(x-1)}{x+2} + B.$$

Cuando evaluamos esto en $x=1$, nos queda $\frac{1}{1+2} = B$, es decir $B = 1/3$. Análogamente, si multiplicamos la ecuación (5) por $x+2$, obtenemos

$$\frac{1}{x-1} = A + \frac{B(x+2)}{x-1},$$

y evaluando en $x=-2$ obtenemos $\frac{1}{-2-1} = A$, es decir, $A = -1/3$.

Este truco se llama "método de la tapadita"porque se aplica así: tomamos

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)},$$

que es la función que queremos descomponer en fracciones simples. *Tapamos* el factor $x+2$ del denominador, y evaluamos lo que queda (es decir, $\frac{1}{x-1}$) en la raíz del factor que hemos tapado, es decir, en $x=-2$. Esto nos da $-1/3$, por lo que en la descomposición aparece

$$\frac{-1/3}{x+2}.$$

Ahora *tapamos* el factor $x-1$ en el denominador, y evaluamos lo que queda en la raíz de $x-1$, obteniendo $1/3$. En la descomposición aparece

$$\frac{1/3}{x-1}.$$

Como ejercicio, verificar que este "método"también funciona para los otros dos ejemplos que vimos, y pensar por qué.

¿Es recordar esto más fácil que resolver un sistema lineal de ecuaciones? Probablemente no, pero este es un truco muy popular que se incluye en estas notas a pedido del público.

Ejemplo 29.

$$R(x) = \frac{2x+3}{(x+2)(x^2+1)}.$$

En este ejemplo, buscamos una descomposición de la forma

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}. \tag{11}$$

Esta ecuación es igual a

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+(A+2C)}{(x+2)(x^2+1)}. \tag{12}$$

Al igualar los numeradores, nos queda el sistema lineal que debemos resolver para obtener A, B y C:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 2B+C &= 2 \\ A+2C &= 3. \end{aligned}$$