Medidas

Como mencionamos anteriormente, las medidas son generalizaciones de los conceptos de longitud, área y volumen. Formalmente hablando, la definición es la siguiente:

Definición: Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra en X. Una medida es una función

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

que satisface las siguientes condiciones:

1) $\mu(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$.
2) $\mu(\emptyset) = 0$.
3) (σ-aditividad): Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es una colección numerable de subconjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos (esto es, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$), entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Observaciones:

1) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ o converge o diverge a $+\infty$.
2) Si $(A_i)_{i=0}^{n} \subseteq \mathcal{A}$ es una colección finita de subconjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)$$

Es decir, μ es aditiva. Basta con tomar $A_i = \emptyset$ para $i > m$ y aplicar la σ-aditividad.

3) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonía). Más aún, si $\mu(B) < \infty$ entonces

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$$

$(B - A) \cup A = B$ es una unión disjunta. Luego,

$$\mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A) \geq \mu(A).$$

Si $\mu(B) < \infty$, entonces $\mu(A) < \infty$ y así

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Existen tipos de medidas según la finitud de $\mu(X)$.

<u>Definición</u>: Una medida $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ se dice:

1) finita si $\mu(X) < \infty$;
2) de probabilidad si $\mu(X) = 1$; y
3) σ-finita si existe una colección numerable y disjunta $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplos:

1) Medida de contar: $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$.

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{si } A \text{ es finito,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

X finito $\Longrightarrow$ μ finita.

X numerable $\Longrightarrow$ μ σ-finita.

2) Medida delta de Dirac:

Sea X un conjunto y $x_0 \in X$

$$\varepsilon_{x_0} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$\varepsilon_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A \end{cases}$$

ε_{x_0} es una medida de probabilidad.

3) X no numerable, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de subconjuntos numerables y conumerables de X.

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ es numerable.} \end{cases}$$

μ es una medida de probabilidad.

4) $X = \{0, 1, \ldots, n\}$, $\quad f : X \longrightarrow [0, 1]$

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p \in (0, 1).$$

p = probabilidad de obtener "cara" en un lanzamiento de moneda

$f(k)$ = probabilidad de obtener k caras en n lanzamientos.

$\mu(A) = \sum_{k \in A} f(k)$ es una medida de probabilidad.

$$\mu(X) = \sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

__Definición:__ Un espacio medible está dado por un par $(X, \mathcal{A})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X. Si además $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una medida, diremos que la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida. Si μ es una medida de probabilidad, entonces a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le llama espacio de probabilidad.

__Observación:__

Bajo ciertas condiciones, una medida puede dar lugar a una medida de probabilidad:

$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

$\mu(X) < \infty$ y $\mu(X) \neq 0$.

$P : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ dada por $P(A) = \mu(A)/\mu(X)$ define una medida de probabilidad.

Probemos algunas propiedades adicionales de las medidas. Se trata de criterios para ver cuando una función finitamente aditiva es σ-aditiva, condición que suele ser difícil de verificar.

Proposición: Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una función finitamente aditiva.

1) μ es σ-aditiva si, y solamente si, para toda sucesión creciente $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ de conjuntos en $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \uparrow \mu(A_n).$$

2) Si además μ es finita $(\mu(X) < \infty)$, entonces μ es σ-aditiva si, y solamente si, para toda sucesión decreciente $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ de conjuntos en $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \downarrow \mu(A_n).$$

· **Demostración:**

1) $(\Rightarrow)$ Supongamos que μ es σ-aditiva. Si $\mu(A_n) = \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por la propiedad de monotonía se tiene que $\mu(A_m) = \infty$ $\forall m \geq n$. Entonces,

$$\lim_{m \to \infty} \uparrow \mu(A_m) = \infty.$$

Por otro lado, como $A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, se tiene de nuevo

por la propiedad de monotonía que $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$.
Por lo tanto, en este caso se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A_n).$$

Supongamos ahora que $\mu(A_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Escribimos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ como una unión disjunta:

$$E_1 = A_1,\ E_2 = A_2 - A_1, \dots,\ E_n = A_n - A_{n-1}, \dots$$

Así, como μ es σ-aditiva, se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})\right) \quad (\text{ya que } \mu(A_n) < \infty).$$

$$+ \mu(A_1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A_n) \quad (\text{serie telescópica}).$$

($\Leftarrow$) Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ una colección disjunta y numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$.
Sea $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_n$. Tenemos que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una colección creciente de conjuntos en $\mathcal{A}$. Luego,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A_n)$$

Por otro lado,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

Como μ es finitamente aditiva, se tiene

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i).$$

Luego,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

2) ($\Rightarrow$) Sea $B_n = A_1 - A_n \in \mathcal{A}$, y note que

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \cdots$$

Luego, por la parte 1), obtenemos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(B_n).$$

Por otro lado, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c)$

$$= A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

$$= A_1 - \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Al ser μ finita, se tiene que

$$\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n) \quad \text{y}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Luego, $\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_1) - \mu(A_n)\right)$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

($\Leftarrow$) Por la parte 1), basta con demostrar que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

para toda colección creciente $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos en a.

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \cdots$$

$$B_1^c \supseteq B_2^c \supseteq \cdots \supseteq B_n^c \supseteq B_{n+1}^c \supseteq \cdots$$

Sabemos por hipótesis que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n^c).$$

Por otro lado, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $B_n^c = X - B_n$.

Por ser μ finita, se tiene que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c\right) = \mu(X) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \text{ y}$$

$$\mu(B_n^c) = \mu(X) - \mu(B_n).$$

Luego,

$$\mu(X) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu(X) - \mu(B_n)\right)$$

$$\mu(X) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(X) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n). \qquad \blacksquare$$

Escaneado con CamScanner

Medida exterior, conjuntos medibles y medida de Lebesgue

En esta sección construiremos la medida de Lebesgue a partir del concepto de medida exterior. La medida de Lebesgue consiste en una generalización del concepto de longitud de un intervalo acotado. La idea general es la siguiente: dado $E \subseteq \mathbb{R}$, consideramos todos los posibles cubrimientos de E por intervalos abiertos, y que sean cubrimientos numerables,

$$E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Bajo ciertas condiciones, se dirá que E es medible Lebesgue y que su medida, denotada por $m(E)$, está dada por

$$m(E) = \inf\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} l(a_n, b_n) \;/\; E \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$$

donde $l(a_n, b_n) = b_n - a_n$ para todo intervalo abierto $(a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}$.

Definición: Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X. Una medida exterior en X es una función generalizada

$$m^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

que cumple con las siguientes condiciones:

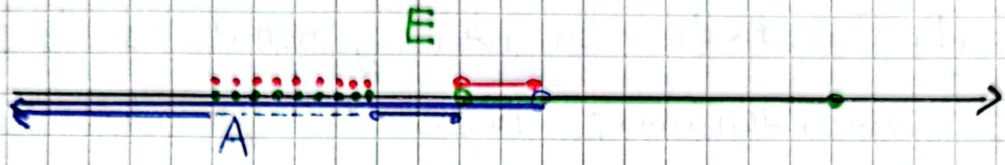
(1) $m^*(\emptyset) = 0$

(2) Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$

(3) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces $m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(A_n)$.

Un conjunto $E \subseteq X$ se dice medible (respecto a m^*) si para todo $A \subseteq X$ se tiene que:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A - E).$$



$$m^*(A \cap E) + m^*(A - E) = m^*(A)$$

Observación: 1) Sea $m^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ una medida exterior y $A, E \subseteq X$. Podemos notar entonces lo siguiente:

$$A = (A \cap E) \cup (A - E)$$

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A - E))$$

$$\leq m^*(A \cap E) + m^*(A - E),$$ ya que m^* es una medida exterior.

Luego, E es medible si y solamente si

$$m^*(A \cap E) + m^*(A - E) \leq m^*(A)$$

para todo $A \subseteq X$ con $m^*(A) < \infty$ (ya que la desigualdad anterior se cumple trivialmente si $m^*(A) = \infty$).

2) Toda medida es una medida exterior, pero no toda medida exterior es una medida. Esto se debe a la existencia de conjuntos no medibles (lo veremos más adelante con la medida de Lebesgue). Sin embargo, restringir m^* a cierto subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ da lugar a una medida.

Teorema de Carathéodory: Considere el conjunto

$$\mathfrak{M} = \{ E \subseteq X \,/\, E \text{ es medible} \},$$

donde "medible" hace referencia a una medida exterior

$$m^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty].$$

Entonces, $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra en X y

$$m = m^*|_{\mathfrak{M}}$$

es una medida.

Ambas afirmaciones se irán demostrando en paralelo. Por otro lado, probaremos primero que $\mathfrak{M}$ es una álgebra en X. Luego, la parte más complicada del teorema será demostrar que $\mathfrak{M}$ es cerrada bajo uniones numerables disjuntas.

- $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ya que $\emptyset \in \mathfrak{M}$: En efecto, para todo $A \subseteq X$ se tiene que

$$\begin{aligned} m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A - \emptyset) &= m^*(\emptyset) + m^*(A) \\ &= 0 + m^*(A) \\ &= m^*(A), \end{aligned}$$

recuerde que $m^*(\emptyset) = 0$ porque m^* es una medida exterior. Se cumple entonces que $\emptyset$ es medible, y por ende la primera condición de la definición de σ-álgebra.

- Como $\emptyset \in \mathcal{M}$, tenemos que

$$m(\emptyset) = m^*(\emptyset) = 0. \quad (*)$$

Por otro lado, para todo $E \in \mathcal{M}$ se tiene que

$$m(E) = m^*(E) \geq 0. \quad (*)$$

((*) tenga en cuenta que m^* es una medida exterior).

Tenemos entonces que m cumple con las dos primeras condiciones de la definición de medida.

- <u>$\mathcal{M}$ es cerrada por complementos</u>:

Sea $E \in \mathcal{M}$. Veamos que $X - E$ es medible.

Para todo $A \subseteq X$ se tiene que:

$m^*(A \cap (X - E)) + m^*(A - (X - E)) =$

$= m^*(A - E) + m^*(A \cap E) = m^*(A)$

↳ ya que $E \in \mathcal{M}$.

Por lo tanto, $X - E \in \mathcal{M}$.

- <u>$\mathcal{M}$ es cerrada bajo uniones finitas</u>:

Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$. Veamos que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Recuerde que basta con probar que

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A - (E_1 \cup E_2)) \leq m^*(A),$$

para todo $A \subseteq X$.

Como $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, se tiene que:

- $m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A - E_1)$, y
- $m^*(A - E_1) = m^*((A - E_1) \cap E_2) + m^*((A - E_1) - E_2)$.

Luego,

$$m^*(A) = m^*(A\cap E_1) + m^*((A-E_1)\cap E_2) + m^*((A-E_1)-E_2)$$
$$= m^*(A\cap E_1) + m^*((A-E_1)\cap E_2) + m^*(A-(E_1\cup E_2)).$$

↳ ya que $(A-E_1)-E_2 = A-(E_1\cup E_2)$.

Por otro lado,

$$A\cap(E_1\cup E_2) = (A\cap E_1)\cup((A-E_1)\cap E_2),$$

y así

$$m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) \leq m^*(A\cap E_1) + m^*((A-E_1)\cap E_2).$$

Entonces,

$$m^*(A) \geq m^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + m^*(A-(E_1\cup E_2)).$$

Finalmente, si $E_1,\dots,E_n \in \mathcal{M}$ y suponemos que $E_1\cup\dots\cup E_{n-1}\in\mathcal{M}$, por la parte anterior tenemos que $E_1\cup\dots\cup E_n\in\mathcal{M}$. Así, por el principio de inducción completa, se tiene que $\mathcal{M}$ es cerrada bajo uniones finitas.

Demostrar la cerradura de $\mathcal{M}$ por uniones numerables disjuntas requerirá de un par de propiedades previas.

<u>Lema 1</u>: Si $E_1,\dots,E_n\in\mathcal{M}$ y $E_i\cap E_j=\emptyset$ si $i\neq j$, entonces

$$m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A\cap E_i)$$

para todo $A\subseteq X$.

- <u>Demostración</u>: Usamos inducción sobre n.

Para $n=2$, considere $E_1, E_2\in\mathcal{M}$ con $E_1\cap E_2=\emptyset$.

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = m^*((A \cap (E_1 \cup E_2)) \cap E_1)$$
$$+ m^*((A \cap (E_1 \cup E_2)) - E_1)$$
$$= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2)$$

↳ ya que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Supongamos ahora que $m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{m} E_i)) = \sum_{i=1}^{m} m^*(A \cap E_i)$ siempre que $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{M}$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Ahora, sean $E_1, \ldots, E_m, E_{m+1} \in \mathcal{M}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Note que $E_{m+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{m} E_i) = \emptyset$. Luego,

$$m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{m+1} E_i)) = m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{m+1} E_i) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} E_i))$$

ya que $\bigcup_{i=1}^{m} E_i$ es medible

$$+ m^*((A \cap (\bigcup_{i=1}^{m+1} E_i)) - (\bigcup_{i=1}^{m} E_i))$$
$$= m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{m} E_i)) + m^*(A \cap E_{m+1})$$

↳ ya que $E_{m+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{m} E_i) = \emptyset$

$$= \sum_{i=1}^{m} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E_{m+1})$$

↳ hipótesis inductiva

$$= \sum_{i=1}^{m+1} m^*(A \cap E_i) \quad \blacksquare$$

Lema 2: Si $E_1, \ldots, E_m, \ldots \in \mathcal{M}$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$m^*(A \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m)) = \sum_{m=1}^{\infty} m^*(A \cap E_m),$$

para todo $A \subseteq X$.

• **Demostración**: Para cada $N \in \{1, 2, \dots\}$, se tiene que

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n \right) \subseteq A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \Rightarrow m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n \right)\right) \leq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)\right)$$

Por el Lema 1,

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n \right)\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n).$$

Así,
$$\sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n) \leq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)\right).$$

Tomando $N \to \infty$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n) \leq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)\right).$$

Finalmente, por ser m^* una medida exterior, se tiene que

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n).$$

Por lo tanto, $m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n)$ ■

• **$\mathfrak{M}$ es cerrada bajo uniones numerables disjuntas:**

Sean $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathfrak{M}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Recuerde que basta probar que

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)\right) + m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)\right) \leq m^*(A).$$

Para cada $N \geq 1$, al ser $\bigcup_{n=1}^{N} E_n$ medible, se tiene que

$$m^*(A) = m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n \right)\right) + m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n \right)\right).$$

Por otro lado, $\bigcup_{n=1}^{N} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow A - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq A - \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)$.

Así,

$$m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \leq m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)\right) + m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)\right) \\ &\geq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right)\right) + m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \end{aligned}$$

↳ por el Lema 1.

Tomando $N \to \infty$, se tiene

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \\ &= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) + m^*\left(A - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \end{aligned}$$

↳ por el Lema 2

Por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible.

- <u>m es σ-aditiva</u>: Sean $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{M}$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Sabemos por el lema 2 que

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n)$$

para todo $A \subseteq X$. Haciendo $A = X$, se obtiene

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Finalmente, al ser E_n y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ medibles, se tiene

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \blacksquare$$