

# Capítulo 7

## Cálculo de integrales

### 7.1. Teorema fundamental

1. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - t + 1} dt \quad b) f(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1} dt$$

$$c) f(x) = \int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2 - t + 1} dt \quad d) f(x) = \int_{x^2}^2 \frac{t^7}{1+t^4} dt \quad e) f(x) = \int_{e^x}^2 \frac{t^7}{1+t^4} dt$$

$$f) f(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{t^7}{1+t^4} dt \quad g) f(x) = \int_{e^x}^{x^3} \frac{\sin(t)}{3+e^t} dt \quad h) f(x) = \int_{\sqrt{x^2+1}}^{3x} \frac{\sin(t)}{3+e^t} dt$$

2. Sabiendo que la integral  $\int_0^1 \sqrt{t^2 - t + 1} = \frac{1}{8}(4 + \log(27))$ , derivar en  $x = 1$  las siguientes funciones

$$a) f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 - t + 1} + x dt \quad b) f(x) = \int_0^{2x-1} \sqrt{t^2 - t + 1} + x^2 dt$$

$$c) f(x) = \int_x^0 x^2 \sqrt{t^2 - t + 1} dt \quad d) f(x) = \int_{x^2}^0 x \sqrt{t^2 - t + 1} dt$$

$$e) f(x) = \int_{\sin(\pi x)}^x e^x \sqrt{t^2 - t + 1} dt \quad f) f(x) = \int_{\log(x)}^{x^2} e^x \sqrt{t^2 - t + 1} dt$$

3. Sea  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. En cada caso determinar  $f(1)$ .

$$a) \int_1^{e^x+x} f(t) dt = \sin(\pi x) \quad b) \int_0^{x^3-x^2+1} f(t) dt = \sin(\pi x)$$

$$c) \int_{\log(1+3x)+1}^1 f(t) dt = \sin(\pi x) \quad d) \int_{e^{x+\sin(x)}}^1 f(t) dt = \sin(\pi x)$$

4. Determinar (si existen) una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y un número real  $c \in \mathbb{R}$  tales que

$$a) \int_0^x f(t) dt = c - e^{-x^2} \quad b) \int_x^1 f(t) dt = \cos^2(x) + c \quad c) \int_x^1 f(t) dt = \sqrt{x^4 + 1} + c$$

$$d) \int_c^x f(t) dt = 2 + x^2 \quad e) \int_c^x f(t) dt = (x-1)^4 \quad f) \int_c^x f(t) dt = \sin^2(x) + 1$$

5. Determinar (si existe) una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$a) \int_1^{\cos(x)} f(t) dt = 2 \sin^2(x) \quad b) \int_0^{x^2} f(t) dt = \log(x^2 + 1)$$

$$c) \int_0^{x^2} f(t) dt = x \sin(x^2) \quad d) \int_0^{x^2} f(t) dt = x^2 \cos(x)$$

6. a) Demuestre que los valores de las siguientes expresiones no dependen del valor de  $x$

$$a) \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt \quad x \in (0, +\infty) \quad b) \int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Calcule  $(f^{-1})'(0)$  para

$$a) f(x) = \int_0^x 1 + \sin(\sin(t)) dt \quad b) f(x) = \int_1^x 1 + \cos(\cos(t)) dt$$

$$c) f(x) = \int_0^{e^x \log(x)} \sqrt{t^2 + e^t} dt \quad d) f(x) = \int_1^{\arctan(x)} \sqrt{t^2 + e^t} dt$$

7. Sea  $F$  la función definida como

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_1^{x^2} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

Entonces la derivada de la función inversa de  $F$  en 0 vale:

$$a) \sqrt{e} \quad b) 2\sqrt{e} \quad c) \frac{1}{2\sqrt{e}} \quad d) \frac{3\sqrt{e}}{2} \quad e) \frac{2\sqrt{e}}{3}$$

8. Sea  $F(x) = \int_0^x f$ . En cada uno de los siguientes casos indicar para qué valores de  $x$  se verifica que  $F'(x) = f(x)$ .

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad b) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

9. Sea  $f$  una función continua, monótona estricta en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ .

- a) Examen, febrero 2017. Probar que

$$\int_a^x f(t) dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t) dt - xf(x) + af(a) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Interprete geoméricamente el resultado.

- b) Calcular  $\int_1^2 \log(t) dt$ , utilizando el resultado de la parte anterior.

10. Sea  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $G(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt$

- a) Probar que  $G$  es derivable en todo  $\mathbb{R}$  y calcular  $G'(x)$ .  
b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de  $G$ .

11. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable con derivada positiva y tal que  $f(1) = 0$ . Definimos  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$

Indicar cuáles de los siguientes enunciados son ciertos

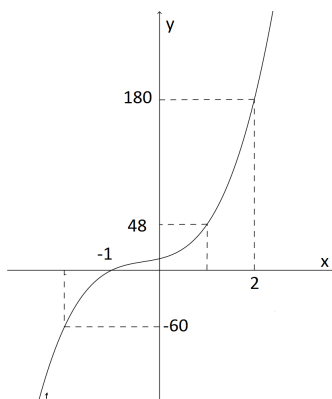
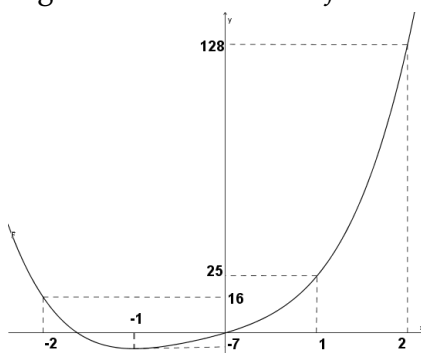
- a) La función  $g$  es continua  
b) La función  $g$  es derivable  
c) La gráfica de  $g$  tiene tangente horizontal en 1  
d) La función  $g$  tiene un mínimo local en 1  
e) La función  $g$  tiene un máximo local en 1  
f) La función  $g$  tiene un punto de inflexión en 1  
g) La grafica de  $g'$  corta al eje  $x$  en el punto  $x = 1$

12. A partir de las derivadas de las inversas trigonométricas, calcular:

$$a) \quad \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$b) \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a, b \in [-1, 1] \quad c) \quad \int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad a, b \in [-1, 1]$$

13. La primer figura corresponde al gráfico de una función  $f$  continua definida en  $\mathbb{R}$  y la figura de abajo corresponde al gráfico de una primitiva  $F$  de  $f$  definida en  $\mathbb{R}$ .

Figura 7.1: Gráfico de  $f$ Figura 7.2: Gráfico de  $F$ 

- a) Calcule  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  y  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ .
- b) Calcule el área de la región limitada por el gráfico de la función  $f$  y el eje  $Ox$  en el intervalo  $[-2, 2]$ .
- c) Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de  $F$  en el punto  $(1, 25)$ .
14. A partir de la fórmula de Barrow, calcular las siguientes integrales

$$\begin{array}{lll}
 a) \int_0^2 x^4 - x^5 + 3 dx & b) \int_0^1 x^6 - 3x^3 + 2 dx & c) \int_1^2 x^5 - 4x^3 + x dx \\
 d) \int_1^4 3\sqrt{x} + \sqrt[5]{x} dx & e) \int_5^{10} \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx & f) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}} \\
 g) \int_1^3 e^{2x} dx & h) \int_0^1 \sin(\pi x) dx & i) \int_1^2 \cos(2x) dx
 \end{array}$$

15. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función positiva y derivable, probar que

$$a) \int_a^b 2f'(t)f(t)dt = f^2(b) - f^2(a), \quad \int_a^b nf'(t)f^{n-1}(t)dt = f^n(b) - f^n(a)$$

$$b) \int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \log(f(b)) - \log(f(a))$$

$$c) \int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}} dt = \sqrt{f(b)} - \sqrt{f(a)}$$

$$d) \int_a^b f'(t)e^{f(t)} dt = e^{f(b)} - e^{f(a)}$$

e) Calcular las siguientes integrales

$$a) \int \sin^6(x) \cos(x) dx \quad b) \int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx \quad c) \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$$

$$d) \int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)} dx \quad e) \int \tan(x) dx \quad f) \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$$

$$g) \int \sqrt{e^x} dx \quad h) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx \quad i) \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

$$j) \int \cos(x)e^{\sin(x)} dx \quad k) \int xe^{x^2} dx \quad l) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

## 7.2. Métodos de integración

1. Calcular a partir de la fórmula de partes, las siguientes integrales:

$$a) \int x \sin(x) dx \quad b) \int x \log(x) dx \quad c) \int xe^{x^2} dx$$

$$d) \int \sin^2(x) dx \quad e) \int \cos^2(x) dx \quad f) \int \log(x) dx$$

$$g) \int \cos(2x) \sin(3x) dx \quad h) \int x^2 e^x dx \quad i) \int \cos(x) e^{2x} dx \quad j) \int \log^2(x) dx$$

2. Calcular las integrales a partir del método de sustitución

$$a) \int e^x \sin(e^x) dx \quad b) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad c) \int xe^{-x^2} dx$$

$$d) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx \quad e) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx \quad f) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$g) \int x\sqrt{1-x^2} dx \quad h) \int x\sqrt{1+x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 i) \int \frac{1}{a^2x^2 + b^2} dx & \quad j) \int \tan(x) dx & \quad k) \int \frac{1}{\cos(x)} dx & \quad l) \int \cos^7(x) dx \\
 m) \int \frac{\log(\log(x))}{x \log(x)} dx & \quad n) \int \log(\cos(x)) \tan(x) dx
 \end{aligned}$$

3. Calcular, utilizando fracciones simples, las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx & \quad b) \int \frac{x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx \\
 c) \int \frac{x^4}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx & \quad d) \int \frac{6x^3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx \\
 e) \int \frac{1}{x^2 + x + 2} dx & \quad f) \int \frac{4x - 3}{3x^2 + 3x + 2} dx & \quad g) \int \frac{4x - 1}{x^2 + 4x + 8} dx \\
 h) \int \frac{dx}{(2x^2 + 1)(x - 1)} & \quad i) \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx
 \end{aligned}$$

4. Calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned}
 a) \int x\sqrt{3x+10} & \quad b) \int \sqrt[3]{x}(2x+1) \\
 c) \int x^3 \sin(x^2+1) dx & \quad d) \int \sin(x) \cos(x) e^{\cos(x)} dx & \quad e) \int \log(x^2+1) dx \\
 f) \int \sin(\sqrt{x-1}) dx & \quad g) \int e^{\sqrt{x}} dx
 \end{aligned}$$

5. Calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned}
 a) \int x \arctan(x) dx & \quad b) \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx & \quad c) \int x \log(\sqrt{x^2+1}) dx \\
 d) \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx & \quad e) \int \frac{\arcsin(x)}{x^2} dx \\
 f) \int \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx & \quad g) \int \frac{2 dt}{e^{-t}+1} dt & \quad h) \int \frac{2e^x + 2e^{-x}}{e^{-x} + 3e^x} dx
 \end{aligned}$$

6. Las funciones trigonométricas hiperbólicas serán útiles en este ejercicio. Recordemos que estas funciones están definidas como  $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Estas funciones verifican que  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ ,  $\cosh'(x) = \sinh(x)$ ,  $\sinh'(x) = \cosh(x)$

Calcular las siguientes integrales

$$a) \int \sqrt{1+x^2} dx \quad b) \int \sqrt{x^2-1} dx \quad c) \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

7. a) Sea  $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ .

Demostrar que  $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ . Calcular  $I_2, I_3$ .

Determinar una fórmula general en función de  $n$ .

b) Sea  $I_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $I_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt$

Probar que  $I_n(x) = x^n e^x - nI_{n-1}(x)$  para todo  $n \geq 1$

c) Sea  $I_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $I_n(x) = \int_1^x \log^n(t) dt$

Probar que  $I_n(x) = x \log(x)^n - nI_{n-1}(x)$  para todo  $n \geq 1$

8. Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$a) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \quad b) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x) dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

9. Sea  $f(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$ ,  $n \geq 1$ .

Demostrar que:

a)  $f(n+1) < f(n)$

b)  $f(n) + f(n+2) = \frac{1}{n-1}$  si  $n > 2$

c)  $\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}$  si  $n > 2$

10. a) Sea  $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Integrando por partes deducir la fórmula de recurrencia

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left( \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x) \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Calcular

$$a) \int \frac{1}{(x^2+9)^2} dx \quad b) \int \frac{2x+3}{(x^2+9)^2} dx \quad c) \int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2} dx$$

### 7.3. Áreas

1. Hallar el área encerrada entre los gráficos de las siguientes funciones

a)  $f(x) = e^{x-1} - 1$  y  $g(x) = 1 - x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$

b)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  y  $g(x) = \frac{1}{x-1}$  en el intervalo  $[2, 4]$

c)  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \cos(x)$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$

2. Hallar el área encerrada entre las siguientes curvas

a) la parábola  $y = x^2$  y la recta  $2x + 3$ .

b) la hipérbola  $9x^2 - 4y^2 = 36$  y la recta  $x = 3$ .

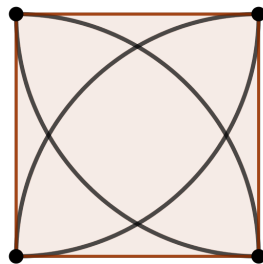
c) la curva  $y = e^x$ , la curva  $y = e^{-x}$  y la recta  $x = 1$ .

d) las curvas  $y = x^4 - x^2$ ,  $y = 3 + x^2$

e) las curvas  $y = x^2 - 1$ ,  $y = \frac{3}{x^2+1}$

3. Calcular el área del círculo de radio  $r$ . Calcular el área de la elipse de ejes de medida  $2a$  y  $2b$

4. En la siguiente figura se muestra un cuadrado y 4 cuartas circunferencias, con centro en cada uno de los vertices del cuadrado y radio de igual medida que el radio del cuadrado.



Determinar el área de cada una de las regiones

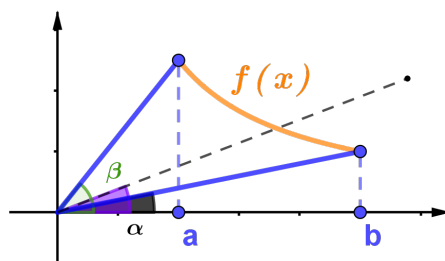
5. Sea  $C$  un cuadrado de lado  $a$  y  $D$  la región de los puntos que están más próximos al centro del cuadrado que a sus lados. Calcular el área de  $D$ .

6. Calcular el área de las siguientes regiones del plano

a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 3\}$

b)  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x, x \leq 2y, x \leq \frac{1}{y} \right\}$       c)  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \frac{(x-3)^2}{3^2} + y^2 \leq 1 \right\}$





### 7.3.1. Áreas en coordenadas polares

Consideremos un región como en la siguiente figura.

Esto quiere decir que la figura está delimitada por dos rayos desde el origen (de pendientes  $\alpha$  y  $\beta$ ) y el gráfico de una función  $f$ .

Además, la función  $f$  cumple la propiedad de que cada rayo de ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta$  corta una única vez el gráfico de  $f$ .

En este caso su área se podría calcular integrando en 2 regiones, la primera es el área de la región entre las rectas, es decir,  $\int_0^a \tan(\beta)t - \tan(\alpha)t dt$ , y la segunda es el área entre el gráfico de  $f$  y la recta de menor pendiente, es decir,  $\int_a^b f(t) - \tan(\alpha)t dt$ .

Como para cada ángulo  $\theta$  el rayo  $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  corta solo una vez el gráfico de  $f$ , existe una función biyectiva  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  tal que  $h(\theta) = x$  si y solo si  $f(x) = \tan(\theta)x$ .

De esta forma, de manera intuitiva el área en cuestión se podría calcular “barriendo” ángulos en vez de rectas verticales.

Probar que el área de la figura es  $\int_{\beta}^{\alpha} h^2(\theta) + f^2(h(\theta)) d\theta$ .

Otra manera de interpretar este problema es cuando pensamos una función  $g$  como un valor del ángulo (es decir  $g(\theta) = f \circ h(\theta)$ )

1. Probar que el área encerrada en este caso es  $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$
2. Calcular el área encerrada por la ecuación  $r = 2\lambda \sin^2(\theta)$  donde  $\lambda$  es una constante.

## 7.4. Longitud de curva

El objetivo de esta sección es definir longitudes de curvas de forma similar al cálculo de áreas a partir de particiones y sumas.

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Dada una partición  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$ , se define  $l(f, P)$  como la longitud de la poligonal que pasa por los puntos  $(x_i, f(x_i))$ , es decir,

$$l(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} d((x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

1. Calcular  $l(f, P)$  y  $l(f, Q)$  para la función  $f(x) = x^2 - x$  y las particiones  $P = \{0, 1, 3\}$ ,  $Q = \{0, 1, 2, 3\}$ .
2. Probar que si  $P$  es una partición del intervalo  $[a, b]$  y  $f$  es una función lipschitziana con constante de Lipschitz  $\lambda$ , entonces  $l(f, P) \leq (b - a)\sqrt{\lambda^2 + 1}$ .
3. Probar que dadas  $P, Q$  dos particiones del intervalo  $[a, b]$  tales que  $Q$  es más fina que  $P$  (es decir  $P \subset Q$ ) se tiene que  $l(f, P) \leq l(f, Q)$ .
4. Probar que dada una partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$ , si  $f$  es monótona entonces  $l(f, P) \leq (a - b) + |f(a) - f(b)|$ .

Se dice que una curva es rectificable en el intervalo  $[a, b]$  cuando el conjunto  $\{l(f, P) : P \text{ partición del intervalo } [a, b]\}$  está acotado superiormente. En este caso llamamos longitud de la curva de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  a dicho supremo.

$$l(f, [a, b]) = \sup\{l(f, P) : P \text{ partición del intervalo } [a, b]\}$$

- 5 Deducir de las partes anteriores que si una función es monótona o Lipschitz entonces su gráfico es rectificable. Deducir que si una función es derivable con derivada acotada entonces su gráfico es rectificable.
- 6 Sea  $f$  una función rectificable en el intervalo  $[a, b]$  y  $c \in (a, b)$ . Probar que

$$l(f, [a, c]) + l(f, [c, b]) = l(f, [a, b])$$

- 7 Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable, con derivada continua y monótona, y  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$ . Definimos  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $h(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

a) Probar que

$$(x_{i+1} - x_i) \inf(f', [x_i, x_{i+1}]) \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq (x_{i+1} - x_i) \sup(f', [x_i, x_{i+1}]).$$

b) Probar que  $S_*(h, P) \leq l(f, P) \leq S^*(h, P)$ .

c) Probar que para toda partición  $Q$  del intervalo  $[a, b]$  se tiene que  $l(f, P) \leq S^*(h, Q)$ .

d) Concluir que

$$l(f, [a, b]) = \int_a^b h(t) dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$$

A partir de esta fórmula podemos calcular longitudes, por ejemplo arcos de circunferencia.

8 Calcular la longitud de arco para las siguientes funciones

$$a) f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} \text{ en } [1, 3] \quad b) f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2} \text{ en } [1, 2]$$

9 Calcule la longitud del hipercicloide de 4 puntas  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

10 **Definición de funciones trigonometricas**

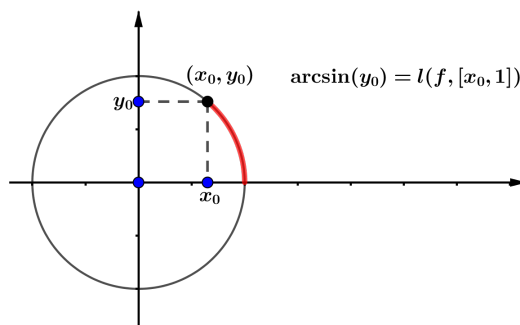
En este ejercicio no se debe usar ninguna propiedad de las funciones trigonometricas antes de probarla, de hecho, esta es una manera de definir dichas funciones.

Definimos las funciones  $\arcsin, \arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a partir de longitudes de arco del círculo.

Notemos  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a la función definida por  $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$

Para la función  $\arcsin$  se toma como el largo del arco de circunferencia entre el punto  $(1, 0)$  y el punto  $(x_0, y_0)$ , más precisamente

$$\arcsin(y) = \begin{cases} l(f, [x, 1]) & \text{si } y \geq 0 \quad \text{donde } x = \sqrt{1 - y^2} \\ -l(f, [x, 1]) & \text{si } y < 0 \quad \text{donde } x = \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$



Para la función  $\arccos$ , se toma la longitud hasta el punto  $(1, 0)$ ; más precisamente

$$\arccos(x) = l(f, [x, 1])$$

Definimos además las funciones  $\sin, \cos$  como las funciones inversas de  $\arcsin$  y  $\arccos$  respectivamente.

- a) Verificar que la función  $\arcsin$  y  $\sin$  son impares.
- b) Probar que  $h(t) = \arccos(-t) + \arcsin(t)$  es una función constante para  $t \in [0, 1]$ .
- c) Calcular  $\arccos'(x)$  y  $\arcsin'(x)$ .
- d) Calcular  $\sin'(0), \cos'(0)$ .
- e) Probar que  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$  para  $\alpha \in [0, \arcsin(1)]$ .

## 7.5. Aplicaciones

1. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de manera que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial es  $m$ , el combustible se consume con una rapidez  $r$  y los gases de escape son expulsados con una velocidad constante  $v_c$  (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo  $t$  esta dada por la ecuación

$$v(t) = -gt - v_c \log\left(\frac{m - rt}{m}\right)$$

donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $t$  no es demasiado grande.

Si  $g = 9,8m/s^2$ ,  $m = 30,000kg$ ,  $r = 160kg/s$ , y  $v_c = 3000m/s$ , encuentre la altura de cohete un minuto después del despegue.

2. Los astrónomos usan una técnica llamada estereografía estelar para determinar la densidad de estrellas de un cúmulo de estrellas, a partir de la densidad observada en dos dimensiones, que se puede analizar de una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio  $R$  la densidad de estrellas depende solo de la distancia  $r$  al centro del cúmulo. Si la densidad percibida de las estrellas está dada por  $y(s)$ , donde  $s$  es la distancia plana observada desde el centro del cúmulo, y  $x(r)$  es la densidad real, se puede demostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}} x(r) dx$$

Si la densidad real de las estrellas del cúmulo es  $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$ , encuentre la densidad percibida  $y(s)$ .

3. El promedio de rapidez de moléculas de un gas perfecto es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x v^3 e^{-Mv^2/(2RT)} dv$$

donde  $M$  es el peso molecular del gas,  $R$  es la constante del gas,  $T$  es la temperatura del gas y  $v$  es la velocidad molecular

Demuestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

4. El centro de gravedad de una superficie plana se define, conceptualmente, de la siguiente manera:

Un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecerá en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el centro de gravedad de la superficie plana del cartón.

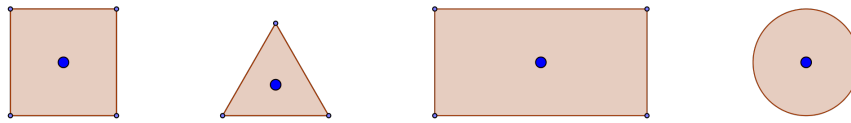
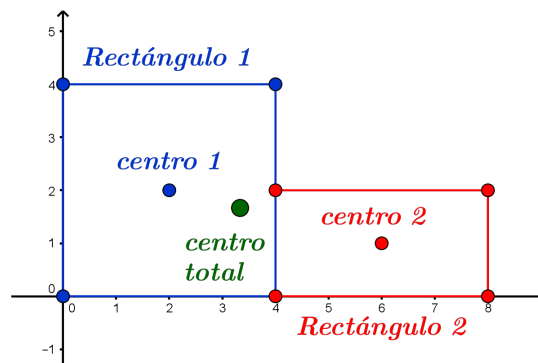


Figura 7.3: Centro de masa de algunas figuras simétricas

Claramente para una figura simétrica (cuadrado, rectángulo, circunferencia y un triángulo equilátero) el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la figura.

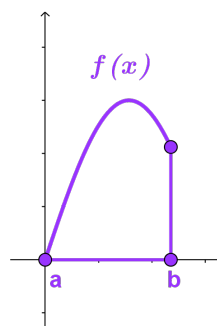
Si se pegan 2 rectángulos como en el de la figura entonces el centro de gravedad es centro total.



Para una superficie como la de la figura el centro de gravedad es  $(M_x, M_y)$ , donde

$$M_y = \frac{\int_a^b f(x)^2 dx}{M} \quad \text{y} \quad M_x = \frac{\int_a^b f(x)x dx}{M} \quad \text{con} \quad M = \int_a^b f(x) dx$$

Bosquejar un argumento sobre esta fórmula apartir del caso de los rectángulos.

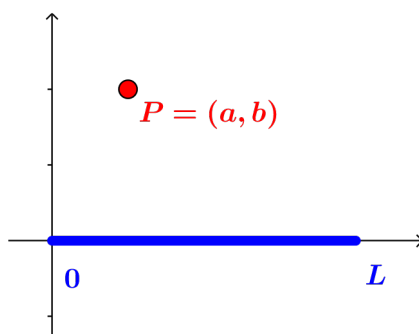


- a) Hallar el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la senoide ( $f(x) = \sin(x)$ )

- b) Calcular el centro de gravedad de la figura comprendida entre la parábola  $x^2 - 1$  y el eje  $Ox$ .
- c) Calcular el centro de gravedad de un semicírculo. Calcular el centro de gravedad de una semi elipse
5. Una varilla con carga de longitud  $L$  produce un campo eléctrico en el punto  $P = (a, b)$  dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}} dx$$

donde  $\lambda$  es la densidad de carga por longitud unitaria en la varilla y  $\epsilon_0$  es la permisividad del espacio libre. Calcule  $E(P)$ .



## 7.6. Complementarios

1. Realice una lista de las integrales que sabe calcular. Compare con sus compañeros.
2. Calcular las siguientes integrales

$$a) \int \frac{\log(x^2)}{x} dx \quad b) \int \frac{\log(x)}{x^2} dx$$

3. Calcular las siguientes integrales

$$a) \int \frac{1}{1+e^x} dx \quad b) \int \frac{1}{1+\sin(x)} dx \quad c) \int \sqrt{e^x+1} dx$$

4. a) Probar que  $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ . Calcular  $\int_0^1 x^2(1-x)^{30} dx$ .  
 b) Sea  $f$  una función continua. Probar que  $\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx$ , y calcular  $\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$   
 c) Demostrar que  $\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}$

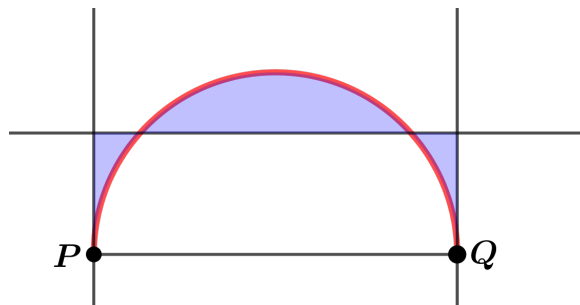
5. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \int \frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx \quad b) \int \operatorname{tg}^3(2x + 1) \sec^2(2x + 1) dx$$

Recordar que  $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ .

6. Calcular la longitud de arco de la parábola  $y = -x^2 + 4$  para  $x \in [-2, 2]$

7. Se considera un semicírculo de radio 1. Su diámetro está marcado por los puntos  $P$  y  $Q$ . Se traza una recta paralela a  $PQ$  y se pintan las regiones mostradas en la figura



Determinar la altura a la que debe estar la recta para que el área pintada sea mínima.

8. **Función  $\Gamma$**

Sea  $t > 0$ , definimos  $g_t(s) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $g_t(s) = \int_1^s e^x x^{t-1} dx$

Probar que existen y son finitos los límites  $\lim_{s \rightarrow 0} g_t(s)$ ,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} g_t(s)$

Definimos la función  $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\Gamma(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} g_t(s) - g_t\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{s}}^s e^x x^{t-1} dx$$

Calcular  $\Gamma(1), \Gamma(2)$ .

Probar que  $\Gamma(n + 1) = (n + 1)\Gamma(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Concluir que  $\Gamma(n) = n!$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .