Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Matemática Discreta 1

Primer semestre 2024

PRÁCTICO 11

Relaciones II

Ejercicio 1. Dada $f : A \to B$ una función, definimos una relación $R_f \subseteq A \times A$ tal que $xR_f y$ si $f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 2. Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$a \equiv b$ si $a - b$ es divisible por n (o sea que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = k.n$).

(a) Demostrar que $a \equiv b \iff a$ y b dan el mismo resto al ser divididos por n.

(b) Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

(c) Describir las clases de equivalencia de $\mathbb{Z}$ con la relación $\equiv$ en los casos $n = 1$, $n = 2$, y $n = 3$.

(d) Probar que en cada caso hay n clases de equivalencia.
Sugerencia: usar el siguiente resultado de división entera. Dados dos enteros positivos a y n existen únicos enteros q y r tales que $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $a = nq + r$.

Ejercicio 3. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A = \{0, \ldots, 9\}$ con $\#[0] = 5$ y $\#[2] = 3$.

Ejercicio 4. En cada caso hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R en $\{0, 1, \ldots, 7\}$ tales que:

a. $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$.

b. $\#[0] < \#[1] < \#[2]$ y $(3, 4) \in R$.

Ejercicio 5. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 6. Hallar la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que $1 > 2 > 3$.

Ejercicio 7. Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Ejercicio 8. Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

Ejercicio 9. Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas desciende de otra.

Ejercicio 10.

a. Halle el número de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

b. Ídem para relaciones de orden.

Ejercicio 11. Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Ejercicio 12. Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, ..., P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_9 > P_7, P_2$; $P_7 > P_6$; $P_6 > P_4$; $P_2 > P_8, P_5$; $P_5 > P_3, P_0$; $P_8 > P_3, P_4$; $P_3, P_4, P_0 > P_1$; donde, por ejemplo, $P_i > P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 13. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

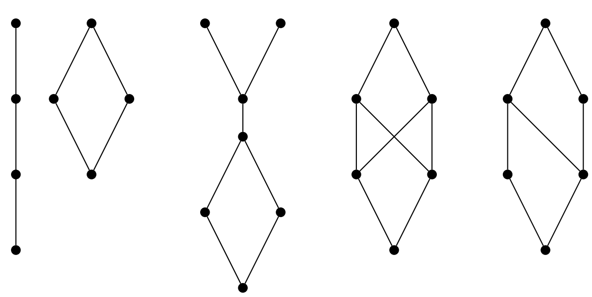

Figura 1:

Ejercicio 14. Demuestre que si A es un conjunto finito y $\leq$ es un orden en A entonces A tiene algún elemento maximal y alguno minimal. Demuestre también que si $(A, \leq)$ es un retículo (látice) y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo. ¿Es cierto alguno de estos resultado si A es infinito? (en caso afirmativo dé una demostración y en caso negativo un contraejemplo).

Ejercicio 15. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibuje el diagrama de Hasse y determine si se trata de un retículo:

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

b. A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.