PRÁCTICO 7
RELACIONES I (SECCIONES 5.1, 7.1, 7.2 Y 7.4)

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

- a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.
- b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.
- c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
- d. $R = \emptyset$.
- e. $R = A \times A$.

Ejercicio 2. Demostrar o hallar un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

- a. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
- b. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea.
- c. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.

Recordemos que el producto entre las relaciones R y S se denota $R \circ S$ y se define de la siguiente manera: $R \circ S = \{(x, z) : \exists y, (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$.

Ejercicio 3. Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Hallar, para cada subconjunto T de P , una relación que cumpla cada una de las propiedades de T y no cumpla ninguna de las propiedades de $P \setminus T$.

Ejercicio 4. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

- a. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\bar{R}$, R^{-1} , RS , $R \cup S$, $R \cap S$?
- b. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva*, *antisimétrica*, *asimétrica* y *transitiva*.

Ejercicio 5. Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias en $A = \{1, 2, \dots, n\}$ son reflexivas? Repita el mismo ejercicio cambiando reflexivas por simétricas y reflexivas por antisimétricas.

Ejercicios de relaciones de equivalencias:

Ejercicio 7. Dada una función $f : A \rightarrow B$, definimos la relación en A dada por: $xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

- (a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A .
- (b) Demostrar que para toda relación de equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ y aRb si $\lfloor \sqrt{a} \rfloor = \lfloor \sqrt{b} \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x .
- (b) $A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ y aRb si $a - b$ es un número par.
- (c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 3.

Ejercicio 9. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb , entonces R es una relación de equivalencia en A .

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 12. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A = \{0, \dots, 9\}$ con $\#[0] = 5$ y $\#[2] = 3$.

Ejercicio 13. En cada caso hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R en $\{0, 1, \dots, 7\}$ tales que:

- a. $\#[0] = 2$ y $\#[1] = 4$.
- b. $\#[0] < \#[1] < \#[2]$ y $(3, 4) \in R$.