Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Topología y Análisis Real
Primer Semestre de 2024

Práctico 11

medidas

1. Sea μ la medida de contar en el espacio medible $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Construya una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente al vacío (es decir, $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$) tal que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq 0$.

2. Si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible, $\mu_1, \dots, \mu_n \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ es una colección finita de medidas en $(X, \mathcal{A})$, y $a_1, \dots, a_n \ in[0, +\infty)$, demuestre que $\sum_{i=1}^{n} a_i \ \mu_i$ es una medida en $(X, \mathcal{A})$.

3. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de medidas $\mu_n \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. Se define la función generalizada $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ de la siguiente manera:

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(A), \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{A}.$$

   Demuestre que μ es una medida.

   (Sugerencia: Puede usar la siguiente propiedad sobre sucesiones dobles: si $(a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión doble de números reales tal que $\{a_{n_0 m}\}_{m=0}^{\infty}$ es creciente para cada n_0 fijo, y $\{a_{n m_0}\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente para cada m_0 fijo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{nm} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nm} = \sup\{a_{nm} \ / \ n, m \in \mathbb{N}\}$$

).

4. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Se define el límite superior e inferior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \ \text{y} \ \liminf A_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

   Demuestre que:

   (a) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$, donde

$$\liminf \mu(A_n) = \sup_{k\geq 0} \left(\inf_{n\geq k} \mu(A_n) \right).$$

   (b) Si $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) < \infty$, entonces $\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n)$, donde

$$\limsup \mu(A_n) = \inf_{k\geq 0} \left(\sup_{n\geq k} \mu(A_n) \right).$$

5. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $A, B \in \mathcal{A}$, demuestre que

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

6. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $A \in \mathcal{A}$ fijo, demuestre que la función generalizada $\mu_A \colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \text{ para todo } B \in \mathcal{A}$$

   es una medida en $(X, \mathcal{A})$.