Práctico 10

σ-álgebras

1. Sea $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Demuestre que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ coincide con la σ-álgebra generada por los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. (No utilice el Ejercicio 2).

2. Sea (M,d) un espacio métrico tal que $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_0$, donde cada k_n es un subconjunto compacto de M. Demuestre que $\mathcal{B}_M$, la σ-álgebra de Borel de M, coincide con la σ-álgebra generada por los subconjuntos compactos de M.

3. Sea $f: X \to Y$ una función entre conjuntos cualesquiera, $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X, y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de Y. Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de Y y X:

$$f(\mathcal{A}) = \{f(A)\ /\ A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(Y),$$
$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B)\ /\ B \in \mathcal{B}\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

   (a) Demuestre que si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra en Y, entonces $f^{-1}(\mathcal{B})$ es una σ-álgebra en X.

   (b) Dé un ejemplo de una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X tal que $f(\mathcal{A})$ no es una σ-álgebra en Y.

   (c) Demuestre que si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, entonces

$$\mathcal{A}(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{C})),$$

   donde $\mathcal{A}(f^{-1}(\mathcal{C}))$ y $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ denotan la σ-álgebras en X y en Y generadas por $f^{-1}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C}$, respectivamente.

4. Sea $\mathcal{A}$ una álgebra en un conjunto X. Demuestre que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si, y solamente si, $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones numerables crecientes (esto es, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos en $\mathcal{A}$ tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).

5. Sea $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ la σ-álgebra generada por una colección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Demuestre que $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ es la unión de todas las σ-álgebras generadas por $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{F}$ pertenece a la colección de todos los subconjuntos numerables de $\mathcal{C}$.

   (Sugerencia: Demuestre primero que el segundo objeto es una σ-álgebra en X).