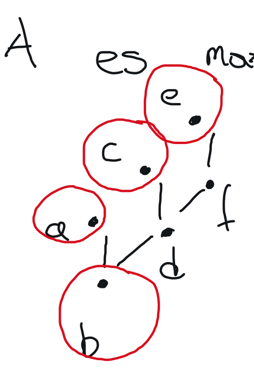
≤ relacion de orden en un conjunto A

- $x \in A$ es maximal si no existe $a \in A$ / $x \leq a$ $a \neq x$

A



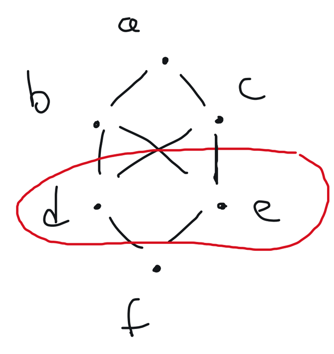
a, c, e son maximales

b es el minimal

- $x \in A$ es minimal si no existe $a \in A$ / $a \leq x$ $a \neq x$

$B \subseteq A$

- $x \in A$ es cota superior de B si $\forall x' \in B$ se cumple $x' \leq x$



$B = \{d, e\}$

A

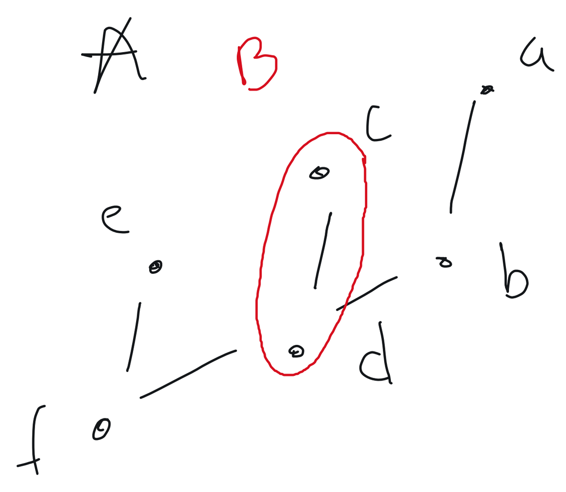
a, b, c son cota superior

f es cota inferior

no hay supremo

f es infimo

- $x \in A$ es cota inferior de B si $\forall x' \in B$ se cumple $x \leq x'$
- x es supremo de B si es cota superior y si x' es otra cota superior de B entonces $x \leq x'$
- x es infimo de B si es cota inferior y si x' es otra cota inferior de B entonces $x' \leq x$
- x es maximo de B si $x = \sup(B)$ y ademas $x \in B$
- x es minimo de B si $x = \inf(B)$ y ademas $x \in B$



c es cota sup

$c = \sup B$ c maximo B

f y d cota inf

$d = \inf B$ d minimo B

Orden total

$(A, \leq)$ es un orden total si $\forall$ $x, y \in A$ se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$

Diagrama de Hasse

EJ4 Un orden parcial $(A, \leq)$ es un buen orden si todo subconjunto no vacio de A tiene un minimo

(a) Dem. Buen orden $\Rightarrow$ Orden total

Por buen orden $\Rightarrow$ $a, b \in A \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} a \text{ es minimo} \Rightarrow a \leq b \\ b \text{ es minimo} \Rightarrow b \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow (A, \leq)$ es orden total

(b) Dem. Orden total $\Rightarrow$ tiene a lo sumo un elem. maximal

supongamos "M_1 y M_2 maximales"

$(A, \leq)$ es un orden total $\Rightarrow M_1 \leq M_2$ y M_1 es maximal $M_1 \geq x \ \forall x \in A$

$\Rightarrow M_2 \leq M_1$

$\Rightarrow \exists$ a lo sumo un elemento maximal

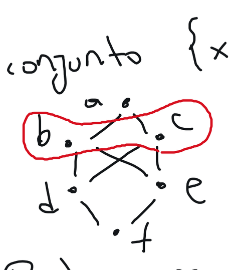
(c) Si orden parcial tene dos maximales $\Rightarrow$ No es un buen orden

$\underset{\text{(buen orden)}}{BO} \Rightarrow \underset{\text{(orden total)}}{OT} \Rightarrow$ Hay a lo sumo un elemento maximal

$BO \Rightarrow$ Hay a lo sumo un elemento maximal

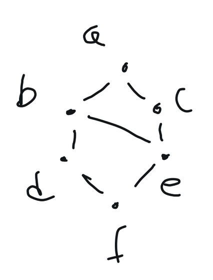
Hay mas de un maximal $\Rightarrow$ No es un buen orden

Reticulo $(A, \leq)$ es un reticulo si $\forall x, y \in A$ el conjunto $\{x, y\}$ tiene infimo y supremo



$\sup\{b, c\} = a$

$\inf\{b, c\} =$ no tiene $\Rightarrow$ No es un reticulo



Reticulo

EJ5 Probar que si $(A, \leq)$ es un reticulo si $\forall x, y \in A$ el conjunto $\{x, y\}$ tienen infimo y supremo (A finito y no vacio)

Dem. Vamos a probar que A tiene maximo

- Si A tiene dos maximales distintos $\Rightarrow$ No tiene maximo

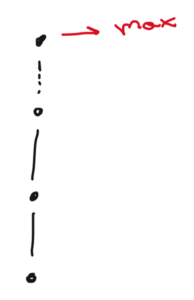
M_1 y M_2 maximales

M maximo $\Rightarrow M \geq x \ \forall x, x \in A \Rightarrow M \geq M_1$
$M \geq M_2$

si M es $M_1 \Rightarrow M_1 \geq M_2 \Rightarrow M_2$ no es maximal

Abs. $\Rightarrow A$ no tiene maximo

- si A es finito y tiene un unico maximal $\Rightarrow$ el maximal es el maximo



Probar que A tiene maximo es ver que tiene un unico maximal

(1) A tiene un maximal (a y b maximales)

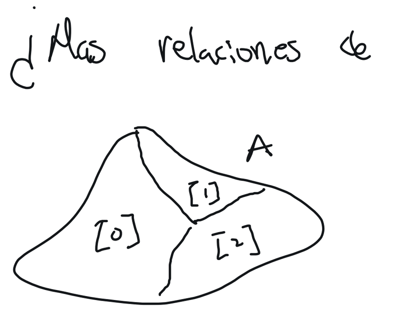
$a, b \in A \Rightarrow$ Como $(A, \leq)$ reticulo $\Rightarrow$ tien supremo

$\left\{\begin{array}{lll} a \geq b & a \geq b \text{ y } b \text{ maximal} \\ a \leq b & b \geq a \text{ y } a \text{ maximal} \\ c \geq a, c \geq b & \text{y } a \text{ y } b \text{ maximales} \Rightarrow \text{Por Abs.} & \overset{\text{existe unico}}{\exists!} \text{ maximal} \end{array}\right.$

■

EJ13 $A = \{1, \ldots, 100\}$ ¿Mas relaciones de equivalencia o de orden?

$\sum_{i=0}^{n} S(n, i)$



MAS RELACIONES DE ORDEN

EJ9 Contar relaciones de equivalencia en $\{0, 1, \ldots, 7\}$

(a) $\#[0] = 2$, $\#[1] = 4$

$[0] = \{0, \underline{3}\} \rightarrow C^6_1$ pos.

$[1] = \{1, \underline{2}, \underline{4}, \underline{5}\} \rightarrow C^5_3$ pos.

$\_\ \_\ o\ \_ / \_ \longrightarrow 2$ pos.

por regla del producto existen $6 \cdot C^5_3 \cdot 2 = 120$ relaciones de equivalencia

(b) $\#[0] < \#[1] < \#[2]$

$3R4 \rightarrow 3, 4$

5

6

7

$\underset{\text{elegir } 3,4}{1} + C^3_2$ pos $\leftarrow$

$\left.\begin{array}{l} [0] = \{0\} \\ [1] = \{1, \_, \_\} \\ [2] = \{2, \_, \_, \_\} \end{array}\right\}$ Caso 1

3 pos. $\leftarrow$

$\left.\begin{array}{l} [0] = \{0\} \\ [1] = \{1, \_\} \\ [2] = \{2, \_\ \_\ \_\ \_\} \end{array}\right\}$ Caso 2

por la regla de la suma tengo $3 + 4 = 7$ relaciones de equivalencia