ESTRATO 06: MEDIDAS

En esta parte del curso vamos a estudiar un concepto que generaliza las nociones de longitud, área y volumen. Este concepto se conoce como "medida", y es central en áreas como la probabilidad y estadística, y la teoría de integración en el análisis real.

Hablando informalmente, una medida es una función

$$\mu : \{\text{conjuntos}\} \to \mathbb{R}$$

tal que: (i) $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ si X e Y son disjuntos.

(ii) Si Y se obtiene a partir de X mediante traslaciones, rotaciones o reflexiones, entonces $\mu(Y) = \mu(X)$.

(iii) Si $X = [0,1) \times \cdots \times [0,1)$ (n veces), entonces $\mu(X) = 1$. Es decir, siempre hay un conjunto de medida referencial.

En los cursos de primaria se aprende a calcular el área y volumen de figuras planas y sólidos conocidos. Más adelante, en los cursos de cálculo se aprende a calcular áreas y volúmenes de figuras más complejas mediante técnicas de integración. Sin embargo, estas figuras sólo abarcan una familia concreta de casos, a saber, figuras planas cuyos bordes son gráficas de funciones conocidas, o volúmenes cuyos bordes son gráficas de funciones de dos variables (superficies). Para abarcar una gama más amplia de regiones, hace falta el concepto de medida.

Empezaremos estudiando quiénes van a ser los dominios de las funciones de medida.

σ - Álgebras

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ su conjunto de partes. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$) se denomina álgebra si:

i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

ii) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones finitas.

iii) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos.

Si además $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables, entonces diremos que $\mathcal{A}$ es una σ- álgebra.

Observaciones:

1) Toda álgebra $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones finitas. En efecto, si $A, B \in \mathcal{A}$, notamos que

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c,$$

donde $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es cerrada por complementos. Luego, $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones finitas. Y finalmente $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.

2) De manera similar, toda σ-álgebra es cerrada por intersecciones numerables:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c.$$

3) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
En efecto, sea $A \in \mathcal{A}$ (recuerde que $\mathcal{A} \neq \emptyset$).
Entonces,

$$\emptyset = A \cap A^c \quad y \quad X = A \cup A^c$$

pertenecen a $\mathcal{A}$ por la definición y la observación 1).

4) Una álgebra $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si, y solamente si, $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones numerables disjuntas.
La implicación ($\Rightarrow$) es clara. Ahora, sea $\mathcal{A}$ una álgebra cerrada por uniones numerables disjuntas, y sean $A_n \in \mathcal{A}$ con $n \in \mathbb{N}$. Considere:

$$B_1 = A_1 \quad y \quad B_n = A_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \quad (n \geq 2)$$

Luego, $B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c = A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \in \mathcal{A}$.

Así, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ ya que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables disjuntas.

Ejemplos:

1) $\{\emptyset, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ son ejemplos triviales de (σ-) álgebras.

2) $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, X\}$ es una (σ-) álgebra.

Escaneado con CamScanner

3) La intersección de una familia de σ-álgebras en X es de nuevo una σ-álgebra en X.

$\mathcal{A}_i$ σ-álgebra en X, donde $i \in I$.

Definimos $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \subseteq X \,/\, A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I\}$

· $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ $\forall i \in I$, por lo cual $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

· Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $A_n \in \mathcal{A}_i$, $\forall i \in I$. Como $\mathcal{A}_i$ es una σ-álgebra, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i$, $\forall i \in I$. Entonces, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

· Finalmente, si $A \in \mathcal{A}$ $(A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I)$, entonces $A^c \in \mathcal{A}_i$ $\forall i \in I$. De acá se tiene que $A^c \in \mathcal{A}$.

$\therefore$ $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ es una σ-álgebra en X.

4) Sea X un conjunto no numerable e infinito. Se define $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ como

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \,/\, A \text{ es numerable o } A^c \text{ es numerable}\}.$$

$\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, llamada la σ-álgebra de subconjuntos numerables o co-numerables de X.

· $X \in \mathcal{A}$ ya que $X^c = \emptyset$ es numerable.

· Si $A \in \mathcal{A}$, claramente $A^c \in \mathcal{A}$.

Escaneado con CamScanner

· Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \in \mathcal{A}$.

Si A_n es numerable $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable, y por tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_0} no es numerable pero $A_{n_0}^c$ sí. Luego,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c,$$ y como $A_{n_0}^c$ es numerable se tiene que $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$ es numerable.

Así, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

5) Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ dada por

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \,/\, A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}.$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, se tiene que $\mathcal{A}$ es una álgebra en X. Sin embargo, $\mathcal{A}$ no es una σ-álgebra. En efecto, para $X = \mathbb{N}$ considere

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, k \text{ es par y } k \leq 2n\}.$$

Claramente, $A_n \in \mathcal{A}$ por ser finito. Por otro lado, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (= conjunto de los números naturales pares) no pertenece a $\mathcal{A}$, por ser infinito y porque su complemento (= conjunto de los números naturales impares) también es infinito.

Además de los ejemplos anteriores, se pueden generar álgebras y σ-álgebras a partir de un subconjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Proposición: Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces, existe una única (σ-) álgebra de X, denotada por $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, tal que:

1) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C})$, y
2) si $\mathcal{A}'$ es cualquier otra (σ-) álgebra de X tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}'$, entonces $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}'$.

A $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ se le conoce como (σ-) álgebra generada por $\mathcal{C}$.

· Demostración: Solamente haremos la demostración del enunciado correspondiente a σ-álgebras (el resultado para álgebras es análogo).

Sea $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \,/\, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en $X \}$.

Note que existe al menos una σ-álgebra en X que contiene a $\mathcal{C}$, a saber, $\mathcal{P}(X)$. Por otro lado, $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ es una σ-álgebra en X por el Ejemplo 3. Claramente, $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ satisface las condiciones 1) y 2).

Finalmente, si $\mathcal{B}$ es otra σ-álgebra que satisface 1) y 2), se tiene que $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{C})$, es decir, $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{C})$. ■

Escaneado con CamScanner

Ejemplos:

1) Sea (M, d) un espacio métrico. A la σ-álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{T}_d)$ se le conoce como σ-álgebra de Borel de M, y será denotada por $\mathcal{B}_M$.

Note que $\mathcal{B}_M = \mathcal{A}(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es la colección de cerrados de M. En efecto, al ser $\mathcal{B}_M$ cerrada por complementos, se tiene que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_M$. Luego, $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}_M$. La otra contención se prueba de manera similar.

2) Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos no vacíos. Considere $X = \prod_{i\in I} X_i$ junto con las proyecciones $\pi_i : X \to X_i$.

Suponga que para cada $i \in I$, se tiene una σ-álgebra $\mathcal{A}_i$ en X_i. Ahora, considere

$$\{\pi_i^{-1}(A_i) \ / \ A_i \in \mathcal{A}_i, \ i \in I\}.$$

A la σ-álgebra generada por el conjunto anterior se le denomina σ-álgebra producto en X, y se denota por $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

Veamos algunas propiedades de $\mathcal{B}_M$ y $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

Escaneado con CamScanner

Proposición (conjuntos generadores de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$):

1) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_1)$, $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) / a < b\}$.
2) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_2)$, $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] / a < b\}$.
3) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_3)$, $\mathcal{E}_3 = \{[a,b) / a < b\}$.
4) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_4)$, $\mathcal{E}_4 = \{(a,b] / a < b\}$.
5) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_5)$, $\mathcal{E}_5 = \{(a,\infty) / a \in \mathbb{R}\}$.
6) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_6)$, $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a) / a \in \mathbb{R}\}$.
7) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_7)$, $\mathcal{E}_7 = \{[a,\infty) / a \in \mathbb{R}\}$.
8) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E}_8)$, $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty,a] / a \in \mathbb{R}\}$.

· **Demostración**: Solamente demostraremos 3) y 7).

Para $[a,b) \in \mathcal{E}_3$, se tiene

$$[a,b) = \{a\} \cup (a,b)$$

donde $\{a\}, (a,b) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ya que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por los abiertos o por los cerrados de $\mathbb{R}$. Como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es cerrada por uniones finitas, se tiene que $[a,b) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Así, $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, por lo cual

$$\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Ahora, sea U un abierto de $\mathbb{R}$. Sabemos que U se puede escribir como unión numerable de intervalos abiertos $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$.

$$(a_n, b_n) = [a_n, b_n) \cap \{a_n\}^c, \text{ con } [a_n, b_n) \in \mathcal{E}_3.$$

Escaneado con CamScanner

$$\{a_m\} = \bigcap_{k\geq 1} [a_m, a_m + 1/k) = \left(\bigcup_{k\geq 1} [a_m, a_m + 1/k)^c \right)^c \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_3).$$

Luego, $(a_m, b_m) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_3)$, y por lo tanto, $U \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

Tenemos que $\mathcal{A}(\mathcal{E}_3)$ es una σ-álgebra que contiene los abiertos de $\mathbb{R}$, por lo cual $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{E}_3)$.

$\therefore \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{A}(\mathcal{E}_3)$.

De manera similar, se puede ver que $\mathcal{A}(\mathcal{E}_7) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Por otro lado,

$$(a_m, b_m) = (a_m, \infty) \cap [b_m, \infty)^c,$$

donde $[b_m, \infty) \in \mathcal{E}_7$, $[b_m, \infty)^c \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_7)$, y

$$(a_m, \infty) = \bigcup_{k\geq 1} \left[a_m + \frac{1}{k}, \infty \right) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_7).$$

Entonces, $(a_m, b_m) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}_7)$, y de aquí se sigue que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{E}_7)$. $\blacksquare$

Proposición: Si $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(\mathcal{E}_i)$ es una σ-álgebra en X_i para cada $i \in I$, entonces la σ-álgebra $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ en X está generada por

$$\mathcal{E} = \{\pi_i^{-1}(A_i) \ / \ A_i \in \mathcal{E}_i, \ i \in I\}.$$

· **Demostración:** Sabemos que $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}(\{\pi_i^{-1}(A_i) \ / \ A_i \in \mathcal{A}_i, \ i \in I\})$, por lo cual es claro que

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i.$$

Para la otra contención, probaremos que

$$\{\pi_i^{-1}(A_i) \ / \ A_i \in \mathcal{A}_i, \ i \in I\} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{E}).$$

Escaneado con CamScanner

Para cada $i \in I$, $\mathcal{B}_i = \{ B \subseteq X_i \mid \pi_i^{-1}(B) \in \mathcal{a}(\mathcal{C}) \}$ es una σ-álgebra en X_i que contiene a $\mathcal{C}_i$. Luego, $\mathcal{B}_i \supseteq \mathcal{a}(\mathcal{C}_i)$. Entonces, si $\pi_i^{-1}(A_i)$ con $A_i \in \mathcal{a}_i = \mathcal{a}(\mathcal{C}_i)$, se tiene $A_i \in \mathcal{B}_i$, de donde $\pi_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{a}(\mathcal{C})$.

$\therefore \{ \pi_i^{-1}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{a}_i, i \in I \} \subseteq \mathcal{a}(\mathcal{C})$. ■

Observación: En la proposición anterior, si I es numerable, entonces $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{a}_i$ está generada por

$$\{ \prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \mathcal{C}_i \}.$$

En efecto, sabemos que

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{a}_i = \mathcal{a}(\{ \pi_i^{-1}(A_i) \mid A_i \in \mathcal{C}_i, i \in I \})$$

$$\pi_i^{-1}(A_i) = \prod_{j \in I} B_j, \text{ donde } B_j = X_j \text{ si } j \neq i, \quad B_i = A_i.$$

Luego, $\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(A_i) \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{a}_i$.

Entonces,

$$\mathcal{a}(\{ \prod_{i \in I} A_i \mid A_i \in \mathcal{C}_i \}) \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathcal{a}_i.$$

La otra contención se sigue de forma análoga.

Para el siguiente resultado, recuerde que un espacio métrico (M, d) es separable si M posee un subconjunto denso numerable en M.

<u>Proposición</u>: Sean $M_1, \ldots, M_n$ espacios métricos, y $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ equipado con la métrica producto. Entonces, $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{M_i} \subseteq \mathcal{B}_M$. Más aún, si cada M_i es separable, se tiene que $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{M_i} = \mathcal{B}_M$.

· <u>Demostración</u>:

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{M_i} = \mathcal{a}\left(\{\pi_i^{-1}(U_i) \,/\, U_i \text{ abierto en } M_i,\ i=1,\ldots,n\}\right)$$

π_i continua $\Rightarrow$ $\pi_i^{-1}(U_i)$ es abierto en M

$\{\pi_i^{-1}(U_i) \,/\, U_i \text{ abierto en } M_i\} \subseteq \mathcal{B}_M$

Luego, $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{M_i} \subseteq \mathcal{B}_M$.

Ahora supongamos que cada M_i es separable.

$M_i = \overline{D_i}$, $D_i \subseteq M_i$ numerable.

Luego, M_i tiene una base numerable β_i (bolas con centros en D_i y radios en $\mathbb{Q}^+$).

$\mathcal{B}_{M_i} = \mathcal{a}(\beta_i)$. Por la observación anterior,

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_{M_i} = \mathcal{a}\left(\{U_1 \times \cdots \times U_n \,/\, U_i \in \beta_i\}\right)$$

Como M posee la métrica producto, $U_1 \times \cdots \times U_n$ es una bola abierta en M.

$\therefore \mathcal{a}\left(\{U_1 \times \cdots \times U_n \,/\, U_i \in \beta_i\}\right) = \mathcal{B}_M$. $\blacksquare$

Escaneado con CamScanner

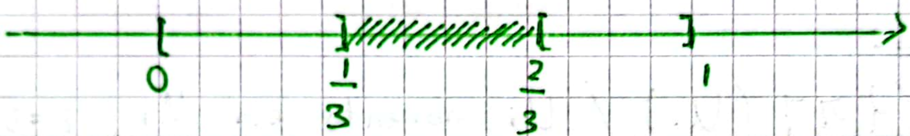
Ejemplo: Conjunto de Cantor.

Considere el intervalo $[0,1]$, y divídalo en tres partes iguales:

$$[0,1] = [0, 1/3] \cup (1/3, 2/3) \cup [2/3, 1]$$

Sea $J_{1,1} = [0, 1/3]$ y $J_{1,2} = [2/3, 1]$, y

$$P_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2} = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

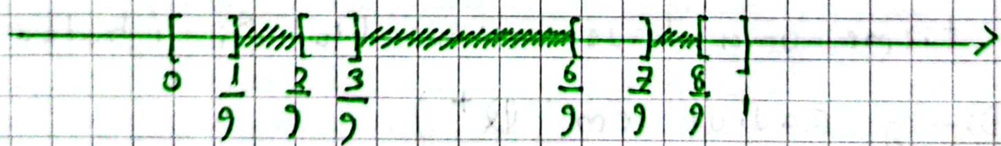


Ahora, dividimos $J_{1,1}$ y $J_{1,2}$ en tres partes iguales, y extraemos los intervalos abiertos de el medio.

$$J_{2,1} = [0, 1/9], \quad J_{2,2} = [2/9, 1/3],$$

$$J_{2,3} = [2/3, 7/9], \quad J_{2,4} = [8/9, 1]$$

$$P_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,2^2}$$



$$P_2 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right].$$

P_2 está formado por 4 intervalos de longitud $1/3^2$.

Siguiendo con el procedimiento anterior, en la n-ésima extracción obtenemos P_n formado por 2^n intervalos cerrados de longitud $1/3^n$.

$$P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}.$$

El conjunto de Cantor se define como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n.$$

- Note que C es cerrado por ser intersección de cerrados, y claramente $P_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- La suma de las longitudes de los intervalos extraidos en la construcción de C es igual a 1.
  - En el primer paso se extrae 1 intervalo de longitud $1/3$
  - En el segundo paso se extraen 2 intervalos de longitud $1/3^2$

    $\vdots$

  - Sea l la suma de las longitudes de todos los intervalos extraidos

$$l = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots\right)$$

Escaneado con CamScanner

$$1 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-2/3)} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

- $C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \ / \ a_n \in \{0, 2\} \right\}.$

Sea $x \in C = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$

- $x \in P_1 \Longrightarrow x \in J_{1,1} = [0, 1/3]$ o $x \in J_{1,2} = [2/3, 1]$.

Si $x \in [0, 1/3]$, entonces $x = \frac{0}{3} + r$, $r \in [0, 1/3]$.

Si $x \in [2/3, 1]$, entonces $x = \frac{2}{3} + r$, $r \in [0, 1/3]$

$$r \in \left[0, \frac{1}{3}\right] = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$$

$$r = \frac{0}{9} + r_1 \quad \text{o} \quad r = \frac{2}{9} + r_1, \quad r_1 \in \left[0, \frac{1}{9}\right].$$

Procediendo de esta manera, vemos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n \in \{0, 2\}.$$

De manera similar, se puede probar que todo número de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ pertenece a C.

- C no es numerable: Esto es consecuencia de tener la siguiente biyección entre $[0, 1]$ y C.

$f : [0, 1] \to C$, $\quad x \in [0, 1]$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{3^n}. \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, \quad b_n \in \{0, 1\}.$$

Escaneado con CamScanner