.

Notas sobre funciones generatrices
Parte I
Material para el curso de Matemática Discreta I

Setiembre 2020

(edición corregida: mayo 2024)

Estas notas sobre funciones generatrices fueron elaboradas con el fin de justificar identidades y manipulaciones algebraicas que son utilizadas al trabajar con funciones generatrices consideradas como serie formales de potencia. Usualmente en el curso de Matemática Discreta 1 utilizamos las secciones 9.1 y 9.2 del libro de Grimaldi como referencia las cuales tienen como ventaja la cantidad de ejemplos resueltos que ayudan al lector a ganar cierta intuición sobre el tema (recomiendo ver esos ejemplos para complementar estas notas). Sin embargo en reiteradas ocasiones se realizan manipulaciones y se utilizan identidades sin justificar rigurosamente, esto tiene el inconveniente de que no queda claro cuáles cosas son lícitas de hacer y cuáles no, y puede inducir al estudiante a realizar manipulaciones incorrectas y llegar a resultados falsos. Ya desde el comienzo se consideran expresiones de la forma $f(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} x)^4$ o identidades del tipo $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(1-x) = 1$ sin definir formalmente qué significa elevar una función generatriz a una potencia o multiplicar dos funciones generatrices. Esto podría llevar a alguien a malinterpretar igualdades de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (*) la cual parece sugerir que tanto $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ como $\frac{1}{1-x}$ están definidas para los mismos valores reales y para esos valores coinciden lo cual es erróneo. De hecho veremos que existen funciones generatrices que convergen para los mismos valores de x y para esos valores coinciden, sin embargo son diferentes como funciones generatrices ya que lo que las definen son sus coeficientes (ese es el significado del adjetivo"formal´´ cuando definimos funciones generatrices como serie formales de potencia), o sea no deben ser consideradas como funciones de x. Luego se derivan de ambos lados identidades como (*) sin mencionar que la derivación es formal y que para la derivación formal valen las reglas clásicas usuales de cálculo. Por ejemplo, la función generatriz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n$ no es derivable en ningún punto como función pero eso no impide que la podamos derivar formalmente, sin embargo al utilizar las propiedades de la derivada aquí no podemos realizar las mismas justificaciones que en cálculo. Antes de utilizar desarrollo de Taylor para probar identidades como $(1+x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} x^n$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ se debería en primer lugar dejar en claro que se entiende por la inversa de una función generatriz (para darle sentido a la expresión $\frac{1}{(1+x)^m}$), luego mencionar que la derivada formal de un cociente de funciones generatrices verifica $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$ y antes de eso explicar cuándo se puede dividir una función generatriz $f(x)$ entre otra $g(x)$ y qué sentido tiene esta división, etc.
También el tema de la substitución es delicado. Por ejemplo, el Ejemplo 9.8. del libro de Grimaldi parte de la identidad:

$$(1-x)^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-7}{n} x^n \quad (**)$$

y substituyendo en esa ecuación x por $2x$ (lo cual es equivalente a hacer cambio de variable) obteniendo $(1-2x)^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-7}{n} 2^n x^n$ que en este caso es correcto pero pareciera que siempre podemos hacer substitución lo cual es falso. Por ejemplo si realizáramos la substitución x por $1-x$ en $(**)$, obtendríamos la identidad falsa $x^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-7}{n} (1-x)^n$.

Estas notas fueron elaboradas en el 2020 y corregidas en el 2024. Agradezco mucho a la profa. Débora Stalker quién colaboró con el pasaje a latex de estas notas. Quisiera aclarar que el enfoque de definir las funciones generatrices como serie formales se debe al tipo de problemas combinatorios que se abordan en el curso y no porque esté mal o sea inútil utilizar análisis real. De hecho existe una área muy importante de combinatoria llamada combinatoria analítica en donde se estudian las funciones generatrices desde un punto de vista analítico (restringiéndose a aquellas con radio de convergencia positivo), donde entendiendo el comportamiento de estas cerca de las singularidades, es posible obtener información asintótica de cantidades combinatorias; no abordaremos ese tema aquí. Espero que disfruten estas notas y toda sugerencia o comentario es bienvenido.

Claudio Qureshi

1 Definición y motivación

Definición 1.1. La función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$ es la serie de potencias formal ("polinomio infinito") dado por

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Comentario. El adjetivo "formal" se refiere a que la función generatriz queda unívocamente determinada a partir de la sucesión que la genera, sin importar cuestiones de convergencia. Por ejemplo las funciones generatrices $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} x^n = 2 + 4x + 16x^2 + 256x^3 + \cdots$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{3^n} x^n = 2 + 8x + 512x^2 + 134217728x^3 + \cdots$ convergen solamente en $x = 0$ y además coinciden en 0: $A(0) = B(0) = 2$. Sin embargo como funciones generatrices son distintas pues las sucesiones $(2^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(3^{3^n})_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones diferentes.

Ejemplo 1.2. *Para las siguientes sucesiones tenemos las correspondientes funciones generatrices:*

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots) \mapsto A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots;$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots) \mapsto B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots;$

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots) \mapsto C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots.$

La gran ventaja de trabajar con funciones generatrices es que nos permite manipular sucesiones como un todo, por ejemplo para obtener fórmulas cerradas u obtener nuevas identidades a partir de otras.

Observemos que si la sucesión es finita (o vale cero a partir de un cierto término), la función generatriz resulta un polinomio.

Ejemplo 1.3. *Para las siguientes sucesiones tenemos las correspondientes funciones generatrices:*

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \cdots) \mapsto A(x) = 1 + x + x^2;$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} : b_n = -1$ *si* $n = 10$ *y* $b_n = 0$ *si* $n \neq 10 \mapsto B(x) = -x^{10}.$

A continuación veremos cómo el álgebra de polinomios y la operación de derivación pueden ser aplicados en problemas combinatorios. El extender esas operaciones para funciones generatrices en general nos brinda una herramienta muy poderosa para atacar ciertos problemas en combinatoria.

1.1 Deducción de identidades a partir de otras dadas

Consideremos la función generatriz (polinomio) $A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ donde n es un entero positivo fijo. Observemos que:

$$\begin{aligned} A(x)(1-x) &= (1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + \cdots + (1-x)x^n \\ &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \cdots + x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1}. \end{aligned}$$

Entonces[1]

$$\boxed{A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}} \tag{1}$$

A partir de (1) es posible obtener otras identidades como mostraremos a continuación.

Ejemplo 1.4. *Expresar la función generatriz asociada a la sucesión (b_k) tal que $b_k = k$ para todo $k \leq n$ y $b_k = 0$ para todo $k > n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ es fijo, como cociente de polinomios.*

Solución. *La sucesión es $0, 1, 2, 3, \cdots, n, 0, 0, \cdots$ por lo tanto $B(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$. Si derivamos ambos lados de (1) tenemos que:*

$$A^{'}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}$$

Entonces $B(x) = xA^{'}(x) = \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$.

Comentario. La identidad (1) es llamada "fórmula de la suma geométrica finita" y es importante recordarla para el curso.

Hemos visto cómo deducir nuevas identidades a partir de una dada usando suma, producto y derivada de polinomios. Lamentablemente considerar únicamente polinomios resulta muy restrictivo pues solo nos permite trabajar con sucesiones finitas (o que valen 0 a partir de un término). Para entender estas ideas para sucesiones generales el primer paso es definir estas operaciones para funciones generatrices en general, lo que haremos en la siguiente sección.

1.2 Relación con problemas de distribuciones

Previamente en el curso nos hemos topado con el problema de distribuir n pelotitas idénticas en m cajas numeradas donde considerábamos restricciones sobre la cantidad mínima o máxima de pelotitas que pueden ir a cada caja. Esto es equivalente a resolver en los naturales la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ con restricciones $a_i \leq x_i \leq b_i$ $i = 1, 2, \ldots, m$ (donde los a_i y b_i son naturales fijos).

Si consideramos los subconjuntos $A_i = \{n \in \mathbb{N} : a_i \leq x_i \leq b_i\} \subseteq \mathbb{N}$ entonces la ecuación toma la forma: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ con restricciones $x_i \in A_i$. Ahora consideremos restricciones mucho más generales, es decir, consideremos subconjunto finitos cualesquiera $A_i \subseteq \mathbb{N}$ y la ecuación en los naturales $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ con restricciones $x_i \in A_i$. Para simplificar supondremos que $m = 3$ y consideremos $x_1 + x_2 + x_3 = n$ con restricciones $x_1 \in A, x_2 \in B, x_3 \in C$ donde A, B, C son ciertos subconjuntos finitos de los naturales. La siguiente observación es clave: consideramos el producto de polinomios:

$$F(x) = \left(\sum_{a \in A} x^a\right)\left(\sum_{b \in B} x^b\right)\left(\sum_{c \in C} x^c\right)$$

[1] Es importante notar que si consideramos $A(x) = B(x)/C(x)$ como función de variable real entonces deberíamos remarcar que esta expresión tiene sentido para los valores de x que no anulan al denominador. Sin embargo al trabajar con funciones generatrices, una igualdad $A(x) = B(x)/C(x)$ con $A(x), B(x)$ y $C(x)$ polinomios debe interpretarse como una expresión equivalente al producto de polinomios: $A(x)C(x) = B(x)$ (o sea, en este sentido no hace falta discutir para qué valores reales de x esa expresión tiene sentido).

luego de aplicar la propiedad distributiva de polinomios obtenemos una suma donde cada sumando es de la forma $x^a x^b x^c = x^{a+b+c}$ (donde elegimos un x^a de la primer sumatoria, un x^b de la segunda y un x^c de la tercera, de todas las formas posibles). Cada vez que seleccionemos $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$ tales que $a+b+c=n$ obtendremos un sumando x^n. Esto quiere decir que el coeficiente de x^n en el producto $F(x)$ es exactamente el número de soluciones en los naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = n$ con restricciones $x_1 \in A, x_2 \in B, x_3 \in C$.

Por supuesto, este método resulta eficiente solo si tenemos una forma simple de obtener el coeficiente de x^n en $F(x)$ que no sea haciendo todas las distributivas. Esto no es posible si nos restringimos únicamente a polinomios. La idea clave es que es posible extender la suma y producto de polinomios para funciones generatrices en general. Al considerar problemas de distribuciones nos toparemos, al igual que ahora, con una función generatriz $F(x)$ que es producto de otras funciones generatrices. Si tenemos la suerte de poder expresar $F(x)$ como cociente de polinomios (eso va a depender de las condiciones impuestas) entonces podemos expresar $F(x)$ como suma de fracciones simples en las cuales es fácil de obtener el coeficiente de x^n.

En vista de lo anterior resulta claro que el primer paso es conseguir extender las operaciones de suma, producto, cociente y derivada de polinomios para funciones generatrices en general.

2 Suma, producto y cociente de funciones generatrices

Definimos las operaciones de forma que coincidan con las usuales en el caso de que las funciones generatrices sean polinomios. Sean $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos funciones generatrices. Definimos la suma y producto de la siguiente manera:

- **Suma:** $A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ donde $c_n = a_n + b_n \, \forall n \geq 0$.
- **Multiplicación:** $A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ donde $d_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Comentario. La suma de funciones generatrices es término a término pero el producto no (cuando multiplicamos dos polinomios tampoco lo hacemos término a término). La multiplicación está definida de modo que valga la distributiva y que $x^i x^j = x^{i+j}$. O sea, para obtener el coeficiente de x^n de $A(x)B(x)$ se combinan de todas las maneras posibles los términos $a_i x^i$ de $A(x)$ con los términos $b_j x^j$ de $B(x)$ tales que $i + j = n$.

Definición 2.1. Dadas dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ se le llama convolución de (a_n) y (b_n) y se la denota por $(a_n) * (b_n)$.

Ejemplo 2.2. *La convolución de las sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n = 1, \forall n \geq 0$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} : b_n =$

2^n, $\forall n \geq 0$ *es la sucesión* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} : c_n = 2^{n+1} - 1$, $\forall n \geq 0$. *En efecto:*

$$\begin{aligned} c_n &= a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \cdots + a_0 b_n \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \\ &= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \quad \textit{(por la fórmula de la suma geométrica)} \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

En otras palabras: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) x^n.$

Comentario. Es fácil observar que $f(x) = 0$ es el neutro de la suma (i.e. la función generatriz cuyos coeficientes son todos ceros) y $f(x) = 1$ es el neutro del producto (i.e. la función generatriz cuyos coeficientes son todos ceros salvo el término independiente que es 1). Si consideramos el conjunto de todas las funciones generatrices con coeficientes reales no es dificil probar que la suma es asociativa, conmutativa y todo elemento tiene opuesto, que el producto es asociativo y conmutativo y que vale la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Todo lo anterior se resume diciendo que las funciones generatrices con coeficientes reales con la suma y producto definidos como antes forman un anillo conmutativo (al igual que los polinomios con coeficientes reales con la suma y producto usual).

- **Multiplicación de varias funciones generatrices:** La multiplicación se extiende de forma natural para varios factores. Por ejemplo:

  $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

  donde $d_n = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$ (i, j, k recorren todos los naturales tales que $i + j + k = n$).

  De esta identidad se desprende fácilmente la propiedad asociativa del producto, es decir: $(A(x)B(x))C(x) = A(x)(B(x)C(x))$.

- **División:** No siempre es posible dividir dos funciones generatrices así como tampoco no siempre es posible dividir dos números reales (hay que pedirle que el denominador sea no nulo).

Definición 2.3. Una función generatriz (siempre consideradas con coeficientes reales) $A(x)$ se dice invertible si existe otra función generatriz $B(x)$ tal que $A(x)B(x) = 1$. En este caso definimos $\frac{1}{A(x)} = B(x)$.

Notación. Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se define $A(0) = a_0$.

Teorema 2.4. *Una función generatriz* $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *es invertible si y solo si* $A(0) \neq 0$. *En* *ese caso se tiene que* $\frac{1}{A(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *donde la sucesión* (b_n) *viene dada por:*

$$\begin{cases} b_0 = a_0^{-1}, & \textit{con } A(0) = a_0 \neq 0; \\ b_n = \left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} b_i \right) \cdot a_0^{-1}, & \textit{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Demostración. Sea $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, buscaremos definir los coeficientes b_n, para que $B(x)$ sea la función inversa de $A(x)$. Como $A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i) x^n$ entonces la ecuación $A(x)B(x) = 1$ equivale a las siguientes condiciones:

1. $a_0 b_0 = 1$
2. $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = 0$ para todo $n \geq 1$.

Si $A(0) \neq 0$ entonces $a_0 \neq 0$ y por 1. tenemos que $b_0 = \frac{1}{a_0}$, luego podemos usar 2. para despejar b_n en función de todos los términos anteriores, obteniendo: $b_1 = \frac{-1}{a_0} \cdot a_1 b_0$, $b_2 = \frac{-1}{a_0} \cdot (a_2 b_0 + a_1 b_1)$ y en general:

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} b_i \right), \ \forall n \geq 1.$$

Definición 2.5. Si $B(0) \neq 0$ se define $\frac{A(x)}{B(x)} := A(x) \cdot \frac{1}{B(x)}$ (es decir, dividir entre una función generatriz invertible es multiplicar por su inversa).

Observar que si $B(0) \neq 0$, la ecuación $\frac{A(x)}{B(x)} = C(x)$ es equivalente a la expresión $A(x) = B(x)C(x)$ que se obtiene usando la fórmula del producto.

Ejemplo 2.6. *Hallar los cuatro primeros términos de la función generatriz* $A(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$.

Solución. *Sea* $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *A partir de* $A(x)(1-x-x^2) = 2-x$ *obtenemos*

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)(1 - x - x^2) = 2 - x$$

$$a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + (a_3 - a_2 - a_1)x^3 + \cdots = 2 - x$$

Igualando coeficientes: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 - a_0 = -1 \to a_1 = a_0 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ a_2 - a_1 - a_0 = 0 \to a_2 = a_0 + a_1 = 2 + 1 = 3 \\ a_3 - a_2 - a_1 = 0 \to a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 3 = 4 \end{cases}$

Luego $A(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2} = 2 + x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

Ejemplo 2.7. *Sea* $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$. *Probar que* $F(x)$ *es la función generatriz asociada a la sucesión de Fibonacci, definida por* $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ *y* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ *para* $n \geq 2$.

Solución. *Tenemos* $F(x)(1-x-x^2) = x$ *donde* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. *Luego*

$$(f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + \cdots)(1-x-x^2) = x$$

$$f_0 + (f_1 - f_0)x + (f_2 - f_1 - f_0)x^2 + (f_3 - f_2 - f_1)x^3 + (f_4 - f_3 - f_2)x^4 + \cdots = x$$

Igualando coeficientes: $\begin{cases} f_0 = 0; \\ f_1 - f_0 = 1 \to f_1 = f_0 + 1 = 1; \\ f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0, \forall n \geq 2 \to f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2. \end{cases}$

Comentario. La sucesión de Fibonacci aparece en muchísimas aplicaciones, recomiendo buscar información en sitios web (wikipedia por ejemplo). Ver también la sección 10.7 del Grimaldi. Cada término es la suma de los dos anteriores, comenzando con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ por lo tanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots)$.

Ejemplo 2.8. *Probar que la función generatriz* $A(x) = 1 - x$ *es invertible y hallar su inversa.*

Solución. $A(x)$ *es invertible porque* $A(0) = 1 \neq 0$. *Si denotamos por* $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *a la inversa de* $1 - x$ *tenemos que* $(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots)(1-x) = 1$. *Luego* $b_0 + (b_1 - b_0)x + (b_2 - b_1)x^2 + (b_3 - b_2)x^3 + \cdots = 1$.

Igualando coeficientes $\begin{cases} b_0 = 1; \\ b_n - b_{n-1} = 0,\ \forall n \geq 1 \to b_n = b_{n-1},\ \forall n \geq 1. \end{cases}$

Por lo tanto $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *comienza en* $b_0 = 1$ *y cada término es igual al anterior de donde concluimos que* $b_n = 1, \forall n \geq 0$ *o sea que* $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

En este ejemplo hemos probado el resultado que enunciamos a continuación.

Proposición 2.9. *La función generatriz* $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ *es invertible y su inversa es* $1 - x$. *En otras palabras*

$$\boxed{(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots} \tag{2}$$

Comentario. La identidad (2) es llamada “**fórmula de la suma geométrica infinita**´´ y es importante recordarla para el curso.

Utilizando la fórmula de producto de varias funciones generatrices junto con la fórmula de la suma geométrica infinita podemos obtener la inversa de $(1-x)^m$ con $m \in \mathbb{Z}$.

Proposición 2.10. *Si* $m \in \mathbb{Z}^+$ *entonces* $(1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n$.

Demostración. *Procedemos como en la deducción de la fórmula de potencia de multinomio. Como* $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ *entonces*

$$(1-x)^{-m} = \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)\cdots(1 + x + x^2 + \cdots)}_{m \text{ factores}}$$

Para obtener el coeficiente de x^n*, debemos ver de cuantas formas podemos elegir* x^{α_1} *del primer factor,* x^{α_2} *del segundo factor,* $\cdots$*,* x^{α_m} *del emésimo factor de modo que* $x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_m} = x^n$*, o equivalentemente* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n$ *con* $\alpha_i \in \mathbb{N}$ *que tiene* $\mathrm{CR}_n^m = \binom{n+m-1}{m-1}$ *soluciones. Entonces:*

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{CR}_n^m \cdot x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \cdot x^n. \tag{3}$$

Comentario. Recordemos que, para $t \geq n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\binom{t}{n} = \frac{t!}{n!(t-n)!} = \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)}{n!},$$

o sea, el producto de n factores comenzando en t y restando uno para cada factor, dividido el factorial de n. En esta interpretación no es necesario que t sea entero, por lo cual podemos definir:

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}, \text{ para } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Usando esta expresión no es difícil probar para $m \in \mathbb{Z}^+$ y $n \in \mathbb{N}$, que:

$$\binom{-m}{n} = (-1)^n \binom{n+m-1}{m-1},$$

ver página 438 del libro de Grimaldi.
Luego, la ecuación 3, para $m \in \mathbb{Z}^+$, puede expresarse también así:

$$(1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \binom{-m}{n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} \cdot (-x)^n, \tag{4}$$

expresión muy similar a la ya conocida fórmula del binomio de Newton, con $m \in \mathbb{Z}^+$:

$$(1-x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \cdot (-x)^n.$$

——————— ooo ———————