TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Víctor M. Albornoz
Departamento de Industrias.
Campus Santiago Vitacura, Chile.
Universidad Técnica Federico Santa María

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR.
Montevideo, lunes 20 al viernes 24 de Mayo de 2024

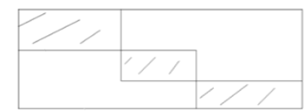
CONTENIDOS

0. Clase Bienvenida.

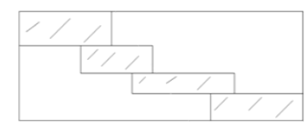
1. Introducción a los Métodos de Descomposición.

2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.

3. **Método de Benders.**



4. Generación de Columnas.



5. Método de Dantzig & Wolfe.

6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.

Ilustraremos el Método de Benders resolviendo el siguiente problema, que desarrollaremos durante la clase:

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Min} & 6x & + 5y_1 & + 4y_2 & + 6y_3 & + 3y_4 & & \\
\text{s.a.} & x & + & & y_3 & & \geq 2 \\
 & x & + y_1 & + 2y_2 & & + y_4 & \geq 3 \\
\end{array}
$$

$$0 \leq x \leq 5/2,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0.$$

Resolveremos un problema de localización y transporte mediante el Método de Benders.

Lo que sigue incluye la deducción del esquema de resolución algorítmica e irá acompañada de la implementación computacional del método en AMPL.

Consideramos la siguiente notación:

Conjuntos e índices.

O : conjunto de potenciales orígenes, con $i \in O$.

D : conjunto de destinos, con $j \in D$.

Parámetros.

o_i : oferta total de unidades en el potencial origen i.

d_j : demanda en destino j.

f_i : costo fijo de apertura del potencial origen i.

$v_{i,j}$: costo unitario de transporte desde i a j.

cu_j : costo unitario de demanda no satisfecha en j.

Variables de decisión.

B_i : variable binaria que toma el valor 1 si el potencial origen i es abierto y 0 en caso contrario.

S_{ij} : unidades transportadas desde i a j.

U_j : unidades de demanda no satisfecha del destino j.

Modelo:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & \sum_{i\in O} f_i B_i + \sum_{i\in O}\sum_{j\in D} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j\in D} cu_j U_j & \\
\text{s.a.} & \sum_{j\in D} S_{ij} \le o_i B_i & i\in O \\
 & \sum_{i\in O} S_{ij} + U_j = d_j & j\in D \\
 & S_{ij}\ge 0,\ U_j\ge 0,\ B_i\in\{0,1\} & i\in O,\ j\in D
\end{array}$$

Variables de decisión.

B_i : variable binaria que toma el valor 1 si el potencial origen i es abierto y 0 en caso contrario.

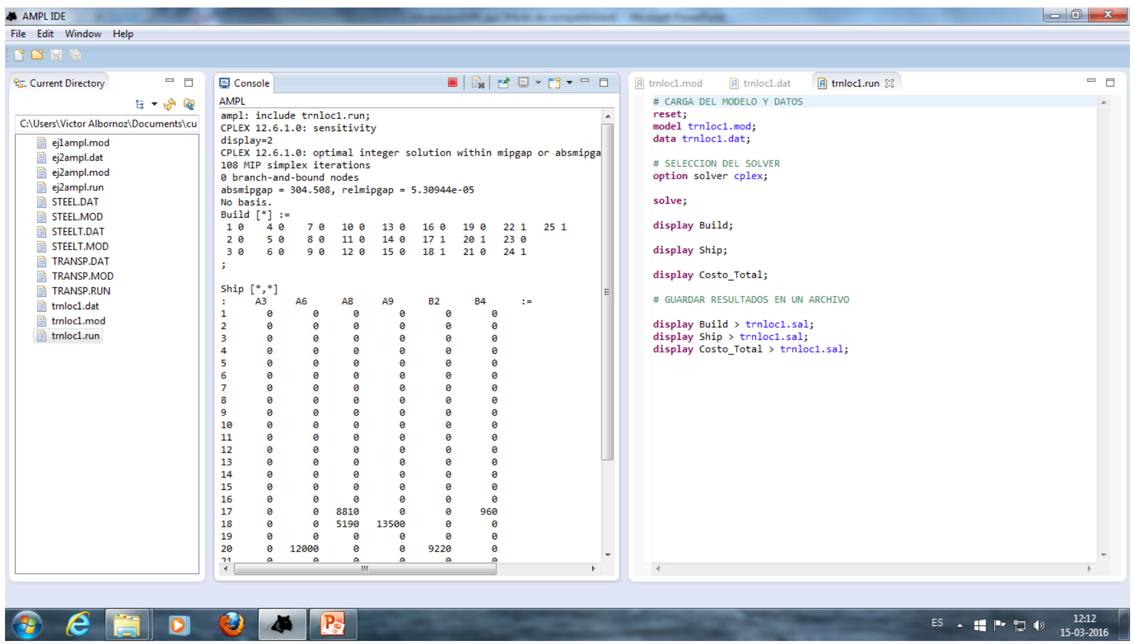
S_{ij} : unidades transportadas desde i a j.

U_j : unidades de demanda no satisfecha del destino j.

Modelo:

$$\begin{array}{lll}
\text{Min} & \sum_{i\in O} f_i B_i + \sum_{i\in O}\sum_{j\in D} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j\in D} cu_j U_j & \\
\text{s.a.} & \sum_{j\in D} S_{ij} \le o_i B_i & i\in O \\
 & \sum_{i\in O} S_{ij} + U_j = d_j & j\in D \\
 & S_{ij}\ge 0,\ U_j\ge 0,\ B_i\in\{0,1\} & i\in O,\ j\in D
\end{array}$$

El modelo propuesto se carga y resuelve para una determinada instancia en AMPL, considerando los archivos trnloc01.mod y trnloc01.dat para su resolución directa.



Por proyección, el modelo puede ser formulado equivalentemente como:

$$\text{Min} \ \sum_{i\in \mathrm{O}} f_i B_i \quad + \quad \text{Min} \ \sum_{i\in \mathrm{O}} \sum_{j\in \mathrm{D}} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j\in \mathrm{D}} cu_j U_j$$

$$\text{s.a.} \ \ B_i \in \{0,1\} \, i\in \mathrm{O} \qquad s.a. \ \sum_{j\in \mathrm{D}} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i\in \mathrm{O}$$

$$\sum_{i\in \mathrm{O}} S_{ij} + U_j = d_j \quad j\in \mathrm{D}$$

$$S_{ij}\geq 0,\ U_j\geq 0,\ i\in \mathrm{O},\ j\in \mathrm{D}.$$

Notar que cualquiera sea el valor de las variables B_i, el problema proyectado (de transporte) siempre tendrá solución.

Por teoría de dualidad en programación lineal, el problema anterior también equivale a:

$$\text{Min} \ \ \textstyle\sum_{i\in \mathrm{O}} f_i B_i \quad + \quad \text{Max} \ \ \textstyle\sum_{i\in \mathrm{O}} (o_i B_i)\boldsymbol{\lambda}_i + \textstyle\sum_{j\in \mathrm{D}} d_j \boldsymbol{\pi}_j$$

$$\text{s.a.} \ \ B_i \in \{0,1\}\ i\in \mathrm{O} \qquad s.a. \ \ \boldsymbol{\lambda}_i + \boldsymbol{\pi}_j \le v_{ij} \ \ i\in \mathrm{O}\ j\in \mathrm{D}$$

$$\boldsymbol{\pi}_j \le cu_j \quad j\in \mathrm{D}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i \le 0,\ \boldsymbol{\pi}_j \in \Re \ \ i\in \mathrm{O},\ j\in \mathrm{D}$$

Dado que el problema proyectado tiene solución óptima, el (subproblema) dual también y se alcanza en uno de sus vértices.

Denotando por $(\lambda,\pi)^{(1)},\ldots,(\lambda,\pi)^{(\mathrm{I})}$ los vértices o puntos extremos del conjunto de soluciones factibles del subproblema dual, el problema original equivale entonces a:

$$\text{Min } \textstyle\sum_{i\in \mathrm{O}} f_i B_i \; + \; \max_{p=1,\ldots,\mathrm{I}} \; \{\textstyle\sum_{i\in \mathrm{O}} (o_i B_i)\boldsymbol{\lambda}_i^{(p)} + \textstyle\sum_{j\in \mathrm{D}} d_j \boldsymbol{\pi}_j^{(p)}\}$$

$$\text{s.a. } \; B_i \in \{0,1\} \; i \in \mathrm{O}$$

Lo anterior define el PROBLEMA MAESTRO:

$$\text{Min} \quad \sum_{i\in \mathrm{O}} f_i B_i \; + \; z$$

$$\text{s.a.} \quad z \geq \sum_{i\in \mathrm{O}} (o_i B_i)\boldsymbol{\lambda}_i^{(p)} + \sum_{j\in \mathrm{D}} d_j \boldsymbol{\pi}_j^{(p)} \qquad p=1,\ldots,\mathrm{I}$$

$$B_i \in \{0,1\} \quad i \in \mathrm{O}$$

Así como el k-ésimo MAESTRO REDUCIDO:

$$\text{Min} \quad \sum_{i\in \mathrm{O}} f_i B_i \; + \; z$$

$$\text{s.a.} \quad z \geq \sum_{i\in \mathrm{O}} (o_i B_i)\boldsymbol{\lambda}_i^{(p)} + \sum_{j\in \mathrm{D}} d_j \boldsymbol{\pi}_j^{(p)} \qquad p=1,\ldots,\text{k-1}$$

$$B_i \in \{0,1\} \quad i \in \mathrm{O}$$

Si en la k-ésima iteración del método (B^k, z^k) denota la solución óptima del Problema Maestro Reducido, esta también lo será para el Problema Maestro en la medida que cumpla con:

$$z^{\mathbf{k}} \geq \sum_{i\in \mathrm{O}} (o_i B_i^{\mathbf{k}}) \boldsymbol{\lambda}_i^{(p)} + \sum_{j\in \mathrm{D}} d_j \boldsymbol{\pi}_j^{(p)} \qquad p=1,\ldots,\mathrm{I}$$

Para constatar lo anterior, basta que se verifique en aquel vértice donde está el mayor de esos valores en el término de la derecha, para lo cual se resuelve el siguiente Subproblema (dual):

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \textstyle\sum_{i \in \mathrm{O}} (o_i B_i^{\mathbf{k}}) \boldsymbol{\lambda}_i + \sum_{j \in \mathrm{D}} d_j \boldsymbol{\pi}_j \\
s.a. \quad & \boldsymbol{\lambda}_i + \boldsymbol{\pi}_j \le v_{ij} \quad i \in \mathrm{O}\ j \in \mathrm{D} \\
& \quad \boldsymbol{\pi}_j \le cu_j \quad j \in \mathrm{D} \\
& \boldsymbol{\lambda}_i \le 0,\ \boldsymbol{\pi}_j \in \Re \quad i \in \mathrm{O},\ j \in \mathrm{D}
\end{aligned}
$$

Para constatar lo anterior, basta que se verifique en aquel vértice donde está el mayor de esos valores en el término de la derecha, para lo cual se resuelve el siguiente Subproblema (dual):

$$
\begin{array}{rlr}
\text{Max} & \sum_{i \in \mathrm{O}} (o_i B_i^{\mathbf{k}}) \boldsymbol{\lambda}_i + \sum_{j \in \mathrm{D}} d_j \boldsymbol{\pi}_j & \\
s.a. & \boldsymbol{\lambda}_i + \boldsymbol{\pi}_j \leq v_{ij} \quad i \in \mathrm{O}\ j \in \mathrm{D} & (S_{ij}) \\
 & \boldsymbol{\pi}_j \leq cu_j \quad j \in \mathrm{D} & (U_j) \\
 & \boldsymbol{\lambda}_i \leq 0,\ \boldsymbol{\pi}_j \in \Re \quad i \in \mathrm{O},\ j \in \mathrm{D} &
\end{array}
$$

Notar que de manera alternativa, se podría resolver el Subproblema (primal):

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \textstyle\sum_{i\in \mathrm{O}} \sum_{j\in \mathrm{D}} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j\in \mathrm{D}} cu_j U_j \\
\text{s.a.} \quad & \textstyle\sum_{j\in D} S_{ij} \le o_i B_i \quad i\in \mathrm{O} \\
& \textstyle\sum_{i\in O} S_{ij} + U_j = d_j \quad j\in \mathrm{D} \\
& S_{ij} \ge 0,\ U_j \ge 0,\ i\in \mathrm{O},\ j\in \mathrm{D}
\end{aligned}
$$

Notar que de manera alternativa, se podría resolver el Subproblema (primal):

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \textstyle\sum_{i\in \mathrm{O}} \sum_{j\in \mathrm{D}} v_{ij} S_{ij} + \sum_{j\in \mathrm{D}} cu_j U_j \\
\text{s.a.} \quad & \textstyle\sum_{j\in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i\in \mathrm{O} \qquad (\boldsymbol{\lambda}_i) \\
& \textstyle\sum_{i\in O} S_{ij} + U_j = d_j \quad j\in \mathrm{D} \qquad (\boldsymbol{\pi}_j) \\
& S_{ij} \geq 0,\ U_j \geq 0,\ i\in \mathrm{O},\ j\in \mathrm{D}
\end{aligned}$$

y obtener las variables duales óptimas como los precios sombra de las respectivas restricciones de oferta y demanda.

De este modo, si el Subproblema (dual) alcanza su solución óptima en el punto extremo $(\lambda^{(k)}, \pi^{(k)})$, el método concluye al comprobar:

$$z^{\mathbf{k}} \geq \sum_{i\in O} (o_i B_i^{\mathbf{k}})\boldsymbol{\lambda}_i^{(k)} + \sum_{j\in D} d_j \boldsymbol{\pi}_j^{(k)}$$

En caso que lo anterior no se cumpla, se agrega al Problema Maestro Reducido la (nueva) restricción:

$$z \geq \sum_{i\in O} (o_i B_i)\boldsymbol{\lambda}_i^{(k)} + \sum_{j\in D} d_j \boldsymbol{\pi}_j^{(k)}$$

Lo deducido de acuerdo al Método de Benders se implementa y resuelve en AMPL para la instancia dada, considerando ahora los archivos trnloc01d.mod y trnloc01d.run para el Subproblema dual y con trnloc01p.mod y trnloc01p.run para el Subproblema primal.