Introducción a la Teoría de la Información

Práctico 5: Capacidad del Canal

Año 2024

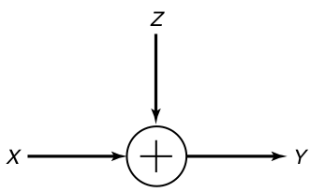
Cada ejercicio tiene un símbolo que indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: $\diamondsuit$ básica, $\star$ media, $*$ avanzada, y $\ddagger$ difícil.

$\diamondsuit$ Problema 1

Se tiene un canal de comunicación con probabilidades de transición $p(y|x)$ y capacidad del canal $C = \max_{p(x)} I(X;Y)$. Un estadístico preprocesa la salida formando $\hat{Y} = g(Y)$. Él afirma que esto mejorará estrictamente la capacidad.
(a) Demuestre que el estadístico está equivocado.
(b) ¿Bajo qué condiciones no disminuye estrictamente la capacidad?

$\diamondsuit$ Problema 2

Encuentre la capacidad del siguiente canal discreto sin memoria:



donde $\Pr\{Z = 0\} = \Pr\{Z = a\} = \frac{1}{2}$. El alfabeto para x es $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Suponga que Z es independiente de X. Observe que la capacidad del canal depende del valor de a.

$\star$ Problema 3

Considere un canal binario simétrico con $Y_i = X_i \oplus Z_i$, donde $\oplus$ es la suma módulo 2, y $X_i,\ Y_i \in \{0,1\}$. Se asume que $\{Z_i\}$ tiene probabilidades marginales constantes $\Pr\{Z_i = 1\} = p = 1 - \Pr\{Z_i = 0\}$, pero que $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ no son necesariamente independientes. Z_n es independiente de la entrada X_n. Sea $C = 1 - H(p, 1-p)$. Muestre que $\max_{p(x_1,x_2,\ldots,x_n)} I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq nC$.

$\diamondsuit$ Problema 4

Considere dos canales discretos sin memoria $(\mathcal{X}_1, p(y_1|x_1), \mathcal{Y}_1)$ y $(\mathcal{X}_2, p(y_2|x_2), \mathcal{Y}_2)$ con capacidades C_1 y C_2, respectivamente. Se forma un nuevo canal $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y_1|x_1) \times p(y_2|x_2), \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)$ en el cual $x_1 \in \mathcal{X}_1$ y $x_2 \in \mathcal{X}_2$ se envían simultáneamente, resultando en y_1 e y_2. Encuentre la capacidad de este canal.

$\diamondsuit$ Problema 5

Considere una máquina de escribir de 26 teclas.
(a) Si presionar una tecla resulta en imprimir la letra asociada, ¿cuál es la capacidad C en bits?
(b) Ahora supongamos que presionar una tecla resulta en imprimir esa letra o la siguiente (con igual probabilidad). Así, A $\rightarrow$ A o B, . . . , Z $\rightarrow$ Z o A. ¿Cuál es la capacidad?
(c) ¿Cuál es el código de mayor tasa con longitud de bloque uno que logre una probabilidad de error cero para el canal en la parte (b)?

$\star$ Problema 6

El canal Z tiene alfabetos de entrada y salida binarios y probabilidades de transición $p(y|x)$ dadas por la siguiente matriz:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad x, y \in \{0,1\}$$

Encuentre la capacidad del canal Z y la distribución de probabilidad de entrada que maximiza (con la que se alcanza el valor máximo de la mutua).

◇ Problema 7

Un canal con alfabeto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tiene probabilidades de transición de la forma:

$$p(y \mid x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } y = x \pm 1 \bmod 5 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(a) Calcule la capacidad de este canal en bits.
(b) La capacidad de cero error de un canal es la cantidad de bits por uso del canal que se pueden transmitir con probabilidad de error cero. Claramente, la capacidad de cero error de este canal pentagonal es al menos 1 bit (transmitir 0 o 1 con probabilidad 1/2). Encuentre un código de bloque que muestre que la capacidad de cero error es mayor que 1 bit. ¿Puede estimar el valor exacto de la capacidad de cero error? (Pista: Considere códigos de longitud 2 para este canal).

⋆ Problema 8

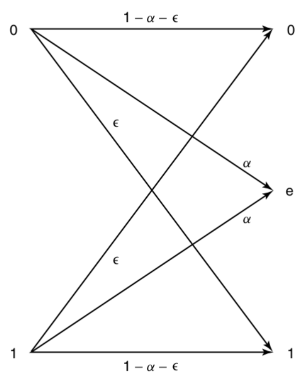
Muestre que la capacidad del canal con matriz de transición de probabilidad

$$P_{y|x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

se logra mediante una distribución que coloca probabilidad cero en uno de los símbolos de entrada. ¿Cuál es la capacidad de este canal? De una razón intuitiva por la cual esa letra no se utiliza.

⋆ Problema 9

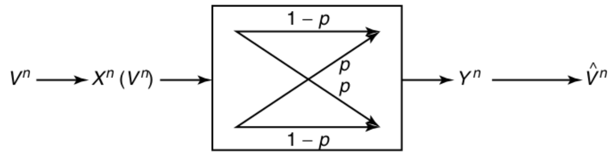
Considere un canal con entradas binarias que tiene tanto errores como borrados. Sea la probabilidad de error ϵ y la probabilidad de borrado α, entonces el canal es como sigue:



(a) Encuentre la capacidad de este canal.
(b) ¿Cuánto es en el caso del canal binario simétrico ($\alpha = 0$)?
(c) ¿Cuánto es en el caso del canal de borrado binario ($\epsilon = 0$)?

$*$ Problema 10

Se desea codificar un proceso Bernoulli(α) $V_1, V_2, \ldots$ para su transmisión a través de un canal binario simétrico con probabilidad de cruce p.



Encuentre condiciones en α y p para que la probabilidad de error $P(\hat{V}_n \neq V_n)$ pueda reducirse a cero a medida que $n \to \infty$.

$*$ Problema 11

Supongamos que se utiliza realimentación en un canal binario simétrico con parámetro p. Cada vez que se recibe un Y, se convierte en la próxima transmisión. Así, X_1 es Bern($\frac{1}{2}$), $X_2 = Y_1$, $X_3 = Y_2$, ..., $X_n = Y_{n-1}$.
(a) Encuentre $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n)$.
(b) Demuestre que para algunos valores de p, esto puede ser mayor que la capacidad.
(c) Usando este esquema de transmisión con realimentación,
$X^n(W, Y^n) = (X_1(W), Y_1, Y_2, ..., Y_{m-1})$, ¿cuál es la tasa de comunicación asintótica lograda; es decir, cuál es $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I(W; Y^n)$?