

## Práctico 9

### propiedades de los espacios compactos

1. Sean  $d_1$  y  $d_2$  dos métricas sobre un conjunto  $M$ , tales que  $d_1$  es más fina que  $d_2$ . Demuestre que si  $(M, d_1)$  es compacto, entonces  $(M, d_2)$  es compacto. Dé un contraejemplo que muestre que la implicación recíproca no es cierta.
2. Sea  $(M, d)$  un espacio métrico y  $X_1, \dots, X_n \subseteq M$  una colección finita de subconjuntos compactos. Demuestre que  $X_1 \cup \dots \cup X_n$  es un subconjunto compacto de  $M$ .
3. Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos compactos y disjuntos de un espacio métrico  $(M, d)$ . Demuestre que existen abiertos disjuntos  $U$  y  $V$  de  $M$  tales que  $A \subseteq U$  y  $B \subseteq V$ .
4. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos disjuntos y no vacíos de un espacio métrico compacto  $(M, d)$ . Demuestre que si  $d(A, B) = 0$ , entonces existe  $p \in \partial A \cap \partial B$ .
5. Sean  $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$  donde  $K$  es un subconjunto compacto y  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\bigcup_{x \in K} B(x, \varepsilon) \subseteq U$ .
6. Dada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, se define  $\xi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\xi(x) := \inf\{f(s) / x < s\}.$$

Demuestre que:

- (a)  $\xi$  es continua y monótona creciente.
  - (b) Si  $f(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b]$ , entonces  $0 < \xi(x) < f(x)$  para todo  $x \in (a, b]$ .
7. Sean  $K$  y  $L$  son espacios métricos compactos y  $f: K \times L \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Se define la función  $\varphi: L \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\varphi(y) := \sup_{x \in K} f(x, y).$$

Demuestre que  $\varphi$  es continua.

8. Dada una función continua  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sea  $\psi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$\psi(r) := \sup_{\|x\|=r} f(x).$$

Demuestre que  $\psi$  es continua. (Aquí,  $\|-\|$  denota la norma usual de  $\mathbb{R}^n$ ).