



Determinación de la constante gravitatoria

Objetivos

Medir experimentalmente el valor de la constante de gravitación universal, empleando como dispositivo experimental un aparato construido a partir de un modelo de péndulo simple, así como también adquirir habilidades de trabajo con datos estadísticos y programas para procesarlos.

Fundamento teórico

Se llevó a cabo la práctica con un dispositivo modelado a partir de un péndulo simple. Esto es, un péndulo en el cual la masa empleada es puntual, el hilo del que cuelga es flexible, inextensible, sin masa y se mueve en un plano. Se desprecian además las fuerzas de rozamiento entre el péndulo y el aire, y el péndulo y su punto de soporte.

La ecuación que describe el movimiento de un péndulo simple es:

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Donde g es la constante gravitatoria, l el largo del hilo, y θ el ángulo respecto al plano vertical. La misma es válida para cualquier θ , pero si tomamos ángulos que no sean muy grandes, podemos usar la aproximación de ángulo pequeños, $\sin(\theta) \approx \theta$, y así linealizar la ecuación:

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (1)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, se llega a una solución general de la siguiente forma:

$$\theta_0 \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

donde θ_0 es el ángulo inicial del péndulo, α su fase inicial y ω la velocidad angular del péndulo:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

El período se define como el tiempo que tarda el péndulo en completar un ciclo, es decir, 2π rad. Considerando esto, dividiendo el ángulo barrido entre la velocidad angular se obtiene la expresión del período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

Notamos que la expresión del período solamente depende del valor de la constante gravitatoria local y la longitud del péndulo, por lo que bajo las hipótesis previas, no varía con el ángulo inicial.

En cuanto a la gravedad, la ecuación que la describe es:

$$\hat{F} = -G \frac{mM}{R^2} \hat{r}$$

Donde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ es la constante de Newton, R es la distancia entre ambos objetos, de masas m y M , y \hat{r} es un versor que conecta los centros de masas de ambos cuerpos.

Como las medidas se realizan con respecto a la Tierra, se toman $R = 6371 \text{ km}$, y $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ como su radio y masa respectivamente. Considerando estos valores constantes en toda la superficie de la Tierra, se obtiene la siguiente expresión para g :

$$g = G \frac{M}{R^2} \simeq 9,8163 \text{ m/s}^2$$

Procedimiento experimental

El dispositivo que construimos para llevar a cabo el experimento consta de una bola de metal, unida a una tanza que a su vez está atada a un soporte, el cual tiene un tornillo atravesado para poder atar la bola al centro del soporte, sin que se mueva demasiado luego de cada medida. A su vez, un semicírculo de apreciación 1° fue pegado con cinta a la parte del soporte de donde cuelga la tanza, y por detrás del tornillo, para poder soltar el péndulo desde el ángulo deseado cada vez. Adicionalmente, se colocó un fotosensor en la parte inferior por donde pasa la bola de metal, para poder medir el tiempo que pasa en cada oscilación.

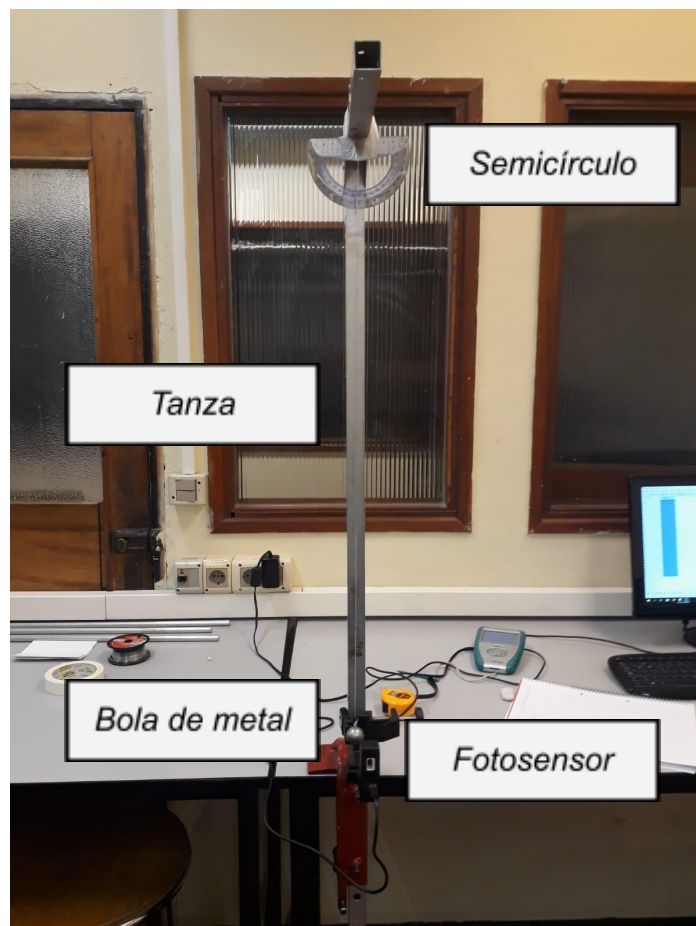


Figura 1: Dispositivo experimental

Elegimos el largo de la tanza para que sea proporcionalmente mucho mayor al de la masa, por lo que podemos hacer la aproximación de que es puntual, además la tanza es

relativamente inextensible, y podemos despreciar su peso en relación al de la masa. Si suponemos además que el rozamiento entre el aire y la pesa es nulo, que el rozamiento entre el punto de soporte del péndulo y la tanza es cero, y ajustamos el ángulo al que soltamos el péndulo para que se mueva aproximadamente en un plano, y con una amplitud de ángulo pequeña, estamos entonces en las hipótesis del péndulo ideal, y podemos usar la ecuación simplificada (1), lo que nos permite usar la ecuación para el período (2). Donde tomamos $l = (74,0 \pm 0,1) \text{ cm}$, medidos con un metro de apreciación 1 mm, desde el soporte, donde atamos la tanza, al centro de la bola de metal, aproximadamente en su centro gravitatorio, asumiendo una distribución de masa uniforme.

El experimento se basará entonces en medir el período del péndulo, y usar ese valor, conociendo l , para despejar la gravedad de la ecuación (2).

Comenzamos entonces soltando el péndulo con distintas amplitudes de ángulo, desde 5° hasta 40° , en incrementos de 5° . Con el objetivo de observar hasta qué ángulo es posible considerar “ángulos pequeños” (recordar que mientras nos mantengamos dentro de las hipótesis de ángulos pequeños, el período debería ser relativamente constante).

Esta parte del experimento fue repetida tres veces, primero con el fotosensor (de apreciación 0,0001 s), luego con el cronómetro (de apreciación 0,01 s), y luego con el cronómetro nuevamente, pero dejando pasar el péndulo por tres períodos, y luego tomando el valor promedio. Decidimos hacerlo de esta manera dado que la primera vez, dado a la muy alta precisión del sensor, obtuvimos una gráfica lineal para el período en vez de valores constantes que luego se alejan. La segunda vez no obtuvimos valores confiables debido al alto error humano introducido en las medidas con el cronómetro. Mientras que la tercera vez al tomar los promedios, obtuvimos valores que se asemejaban más a lo esperado.

Los valores de los períodos contra el ángulo inicial del péndulo se ven en la Figura 2. A partir de estos datos decidimos elegir 10° como el ángulo a usar para medir el período del péndulo, ya que es lo suficientemente pequeño para que valga la aproximación $\sin(\theta) \approx \theta$.

Realizamos entonces las medidas del período, dejando caer el péndulo, midiendo el valor del primer período de oscilación, y repitiendo el procedimiento 50 veces.

Al concluir, realizamos otro procedimiento, en el cual soltamos el péndulo a la misma amplitud inicial, pero esta vez dejándolo hacer 50 oscilaciones consecutivas y registrando su valor. Para ver cómo afectan variables como el rozamiento del aire a la medida del período (al hacer nuestra medición del período con solo el primer valor antes de repetir el procedimiento, estamos minimizando el rozamiento, y por lo tanto podemos despreciarlo. Pero al dejar el péndulo oscilar 50 veces, esto podría no cumplirse).

El último procedimiento consistió en acortar la tanza por unos centímetros cada vez, antes de dejar caer el péndulo desde la misma amplitud inicial, y medir el período de su primer oscilación. Observando así cómo varía el valor del período con la longitud del dispositivo.

Análisis de datos

Determinación del ángulo inicial

A continuación presentamos los resultados obtenidos para el período al dejar caer el péndulo desde distintas amplitudes iniciales. Como podemos ver, en la Figura 2.a, donde tomamos las medidas con el fotosensor, no llegamos al resultado constante esperado, esto lo atribuimos a que el fotosensor es tan preciso que es incluso capaz de registrar cambios tan pequeños en los períodos al variar el ángulo. Aún así, destacamos que luego de la marca de los 25° la velocidad de crecimiento del período aumenta.

En la Figura 2.b tenemos los resultados con el cronómetro. Podemos observar que los resultados están demasiado dispersos dado a la dificultad para registrar correctamente el momento en que el péndulo completa un período, por lo que no podemos usarla para discernir en qué punto la aproximación deja de ser confiable.

Por último, en la Figura 2.c, donde tomamos el período como el promedio de 3 oscilaciones con el cronómetro, los resultados tampoco son los esperados. Hay un valor inicial mucho mayor que los demás, y si ignoramos los valores atípicos de 5° y 15°, podemos ver que los datos que se asemejan a una constante hasta los 30°, a partir de donde comienzan a separarse.

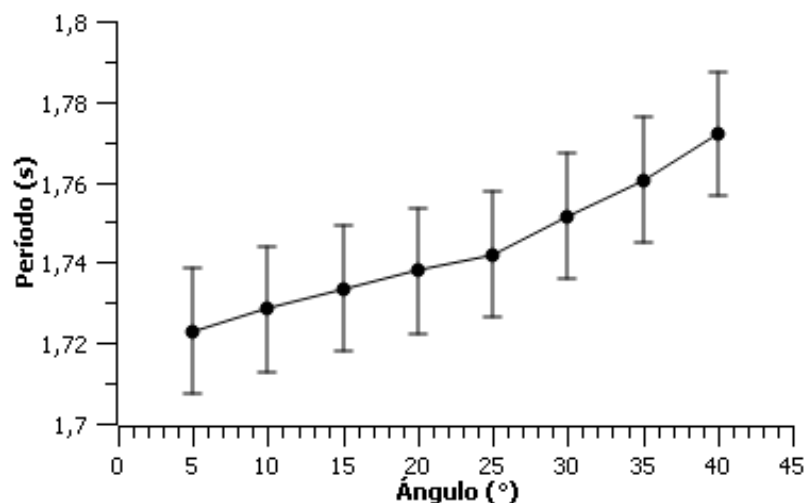


Figura 2.a

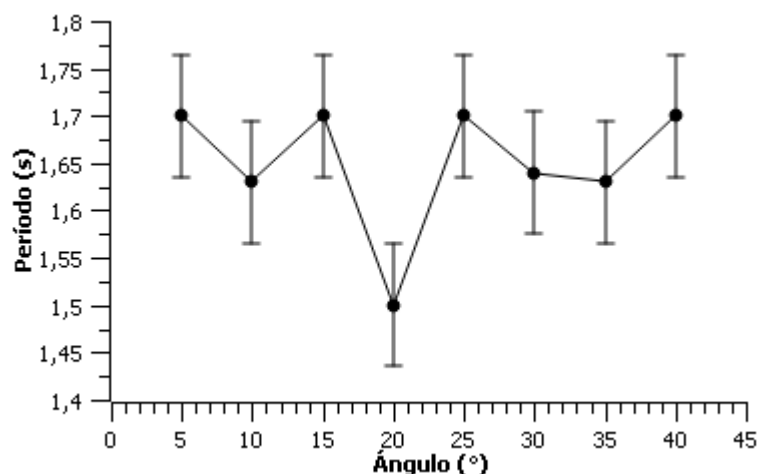


Figura 2.b

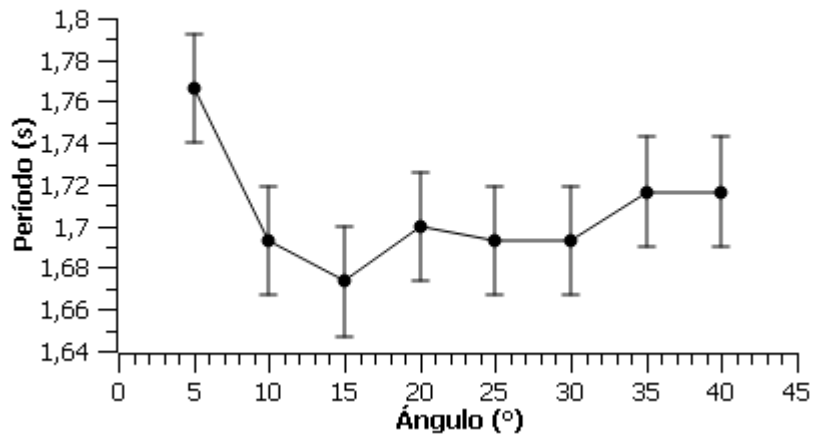


Figura 2.c

Figura 2: Período en función de la amplitud inicial utilizando la desviación estándar:
 a. medido con el fotosensor, b. medido con el cronómetro durante un período, c. medido con el cronómetro durante tres períodos.

Por lo tanto, con los resultados obtenidos, ignorando los presentados en la Figura 2.b dado que son demasiado inconsistentes, observamos que hay una marcada diferencia en las medidas de los períodos luego de las marcas de 25° y 30° , por lo que consideramos que la aproximación es consistente hasta por lo menos 25° . No obstante, dado que no logramos conseguir que los datos siguieran el comportamiento esperado en ninguna de las repeticiones, decidimos emplear para el resto de los experimentos una medida conservativa de 10° de amplitud inicial. Usando este valor como nuestro ángulo para la aproximación de ángulos pequeños, operando matemáticamente vemos que con este ángulo, la diferencia relativa entre la aproximación y el valor real es del orden de 1%.

Medidas del período

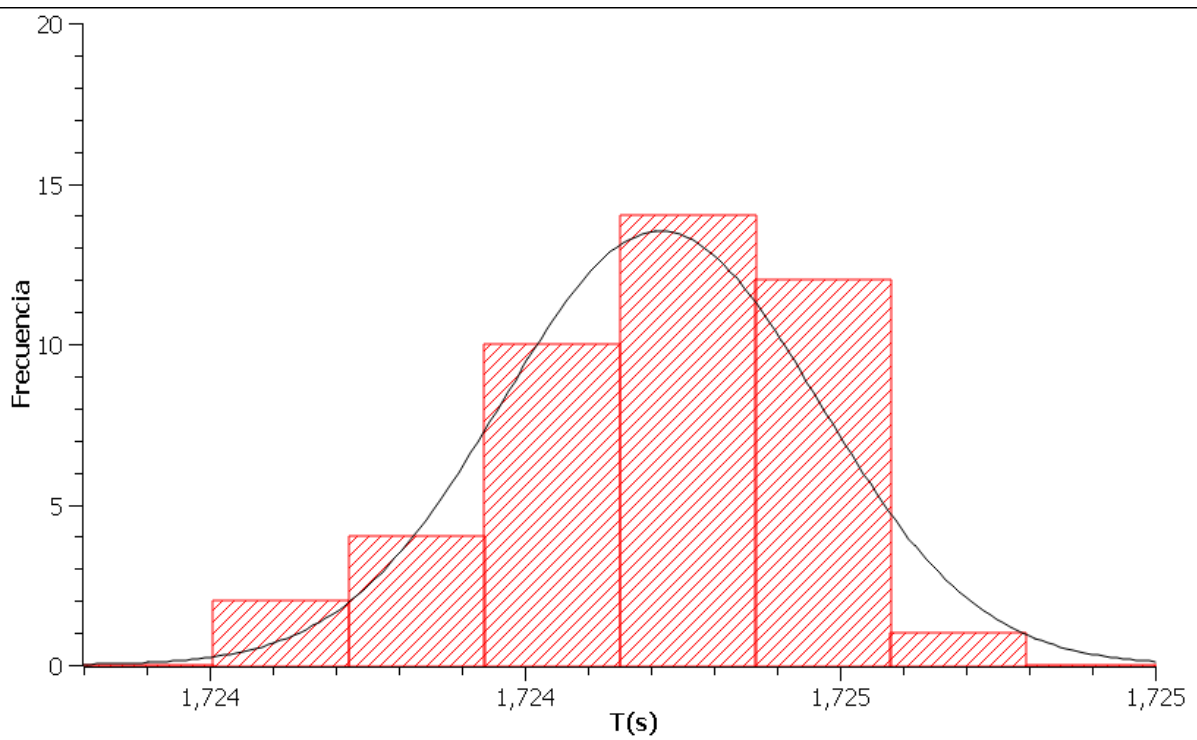


Figura 3.a

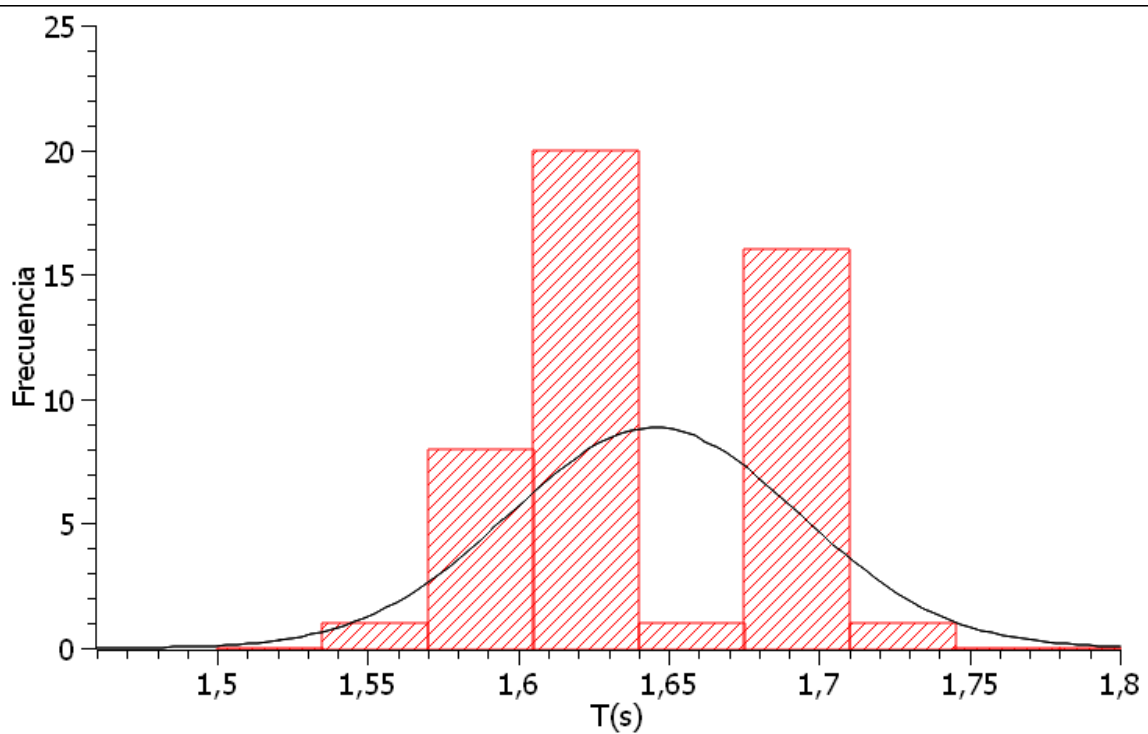


Figura 3.b

*Figura 3: Histograma de medición del período:
a. medido con el sensor, b. medido con el cronómetro*

Al graficar los histogramas, vemos que se acomodan bastante bien a una distribución normal, por lo que podemos aplicar un criterio de descarte de los datos que se encuentren fuera del intervalo $(\bar{x} \pm 2Sn)$, donde \bar{x} es el promedio de las mediciones y Sn es la variación estándar. Podemos hacer esto porque, al tener una distribución normal, tenemos un nivel de confianza de 95,4 % de que el valor verdadero se encuentra dentro de este rango, por lo que podemos considerar los valores que se encuentran fuera del rango como no estadísticamente relevantes.

Así, en la Figura 3 se puede observar que ambos histogramas se asemejan a la distribución gaussiana, la Figura 3a. más que la 3.b. Esto se puede deber a que las medidas con el cronómetro son más inconsistentes ya que el error humano incide más en ellas. La frecuencia de valores se asemeja a una curva gaussiana pues aunque el valor de T verdadero sea uno fijo, debido a la existencia de errores aleatorios y las limitaciones de precisión de los mismos instrumentos de medida, no podemos conocer nunca el valor real, es por eso que realizamos la misma medida muchas veces, ya que así, apoyándonos en la ley de los grandes números, nos acercaremos lo más posible al valor verdadero.

El valor promedio obtenido para el período es entonces $(1,65 \pm 0,01)$ s para las medidas con cronómetro, y $(1,724238 \pm 0,000005)$ s para las medidas con fotosensor. Donde la medida está expresada como el promedio de todos los datos luego del descarte de los no concordantes, acompañada de la incertidumbre, calculada como el desvío del promedio.

Medidas consecutivas del período

En la Figura 4, vemos como el histograma de las mediciones continuas del período también se ajusta relativamente bien a la curva gaussiana. Notar, sin embargo, cómo en comparación a la gráfica obtenida anteriormente, donde se midieron los períodos de forma pausada, la gráfica de la Figura 4 tiene una dispersión mucho menor.

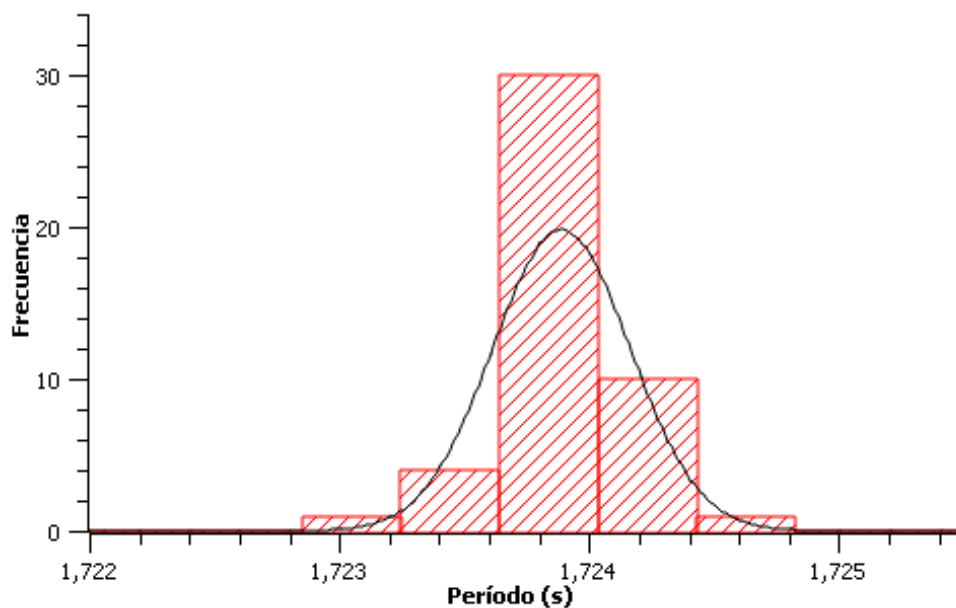


Figura 4: Histograma de medición del período con 50 medidas consecutivas.

Con esta secuencia de datos, el promedio obtenido es de $(1,723890 \pm 0,000004)$ s

Medidas del período en función de la longitud del péndulo

En la tercera parte del experimento, tomamos las medidas del primer período del péndulo a distintas longitudes del hilo, con el objetivo de ver si la relación para ambas variables que plantea la ecuación (2) efectivamente se cumple.

Como podemos observar en la Figura 5, vemos que al aumentar el largo del hilo, el período aumenta proporcionalmente, dando una gráfica con una pendiente relativamente constante, que tiene un muy buen ajuste a cómo se deberían comportar los datos según la aproximación teórica. Por lo que podemos afirmar que en las condiciones del experimento, la relación de la ecuación (2) se cumple.

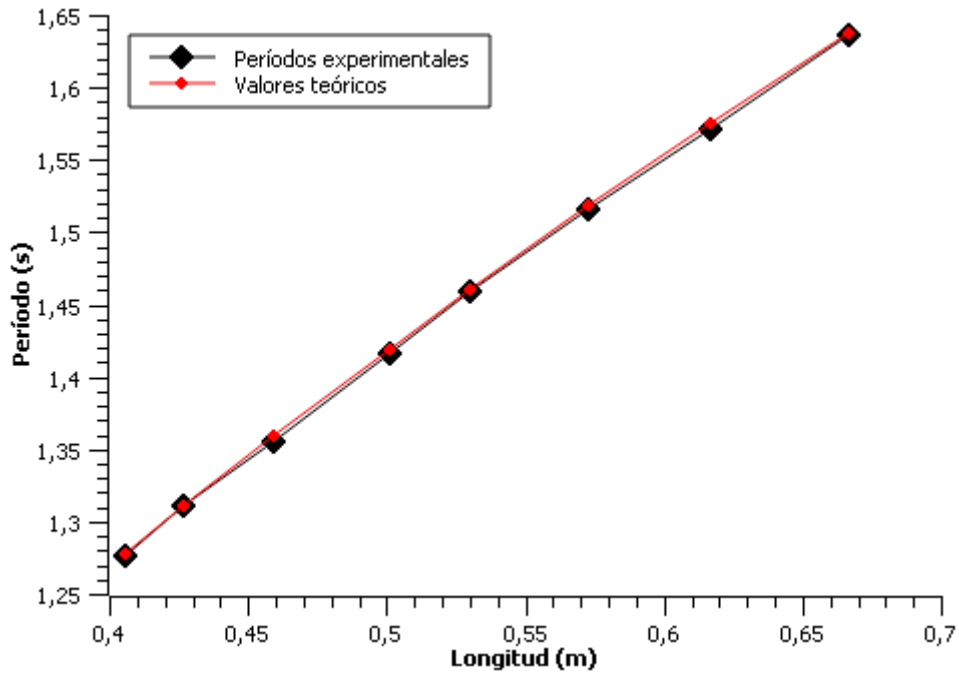


Figura 5: Medidas del período en función de la longitud, con superposición de la misma gráfica pero empleando los valores teóricos.

Valores obtenidos para la gravedad

Utilizando la ecuación (2) podemos despejar la gravedad a partir de los valores de los períodos y la longitud medida. Luego podemos usar la fórmula de propagación de incertidumbres para calcular la incertidumbre de cada medida, lo que nos da los siguientes resultados:

Método	Valor de la gravedad (m/s²)	Error respecto al valor teórico
Valor teórico	9,8*	-
Cronómetro	10,7 ± 0,2	9 %
Sensor	9,8 ± 0,1	0 %
Medidas continuas	9,8 ± 0,1	0 %

*: Usamos 9,8 como valor teórico en lugar de 9,8163, puesto que debido a las incertidumbres, nuestras medidas no tienen la precisión necesaria como para poder compararlas con un número con mayor cantidad de cifras significativas.

Conclusiones

En los tres valores de la gravedad obtenidos, el error relativo es menor a 10%, por lo que las medidas son confiables. El error relativo de la medida con el cronómetro es mucho mayor que el de las otras dos ya que en esas tomas influyen más el error humano, predominantemente en parar el cronómetro en el momento exacto. El cronómetro utilizado tiene una apreciación bastante grande en relación al fotosensor y a otros cronómetros digitales, por lo que utilizando uno con menor apreciación, y prestando especial cuidado al momento en el que se detiene el mismo, se podrían mejorar los resultados obtenidos.

El valor obtenido mediante el primer método, soltando el péndulo 50 veces por separado, y el obtenido soltándolo una única vez y dejándolo realizar 50 oscilaciones, resultaron ser iguales. Por lo tanto, podemos afirmar que nuestro sistema cumplía la suposición de que el rozamiento en el eje del péndulo, y entre el aire y el péndulo efectivamente es despreciable. A su vez, se puede decir que estos últimos dos valores obtenidos son exactos ya que coinciden con el valor real de g.

Según las figuras 2, 3 y 4, el procedimiento de medidas consecutivas logró resultados menos dispersos, es decir, los valores medidos se alejan menos del valor promedio obtenido según ese método. La diferencia esencial entre este procedimiento y los otros dos es que solamente se suelta la bola una vez. Luego se infiere que un factor que afecta de forma importante a la exactitud es el soltar el péndulo.

Apéndice

Fórmula para la propagación de incertidumbres de la gravedad:

$$u(g) = \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{\frac{4L}{T^2} u^2(T) + u^2(L)}$$

Donde $u(g)$ es la incertidumbre de la gravedad.

$u(T)$ la incertidumbre respecto a la medida del período.

$u(L)$ la incertidumbre respecto a la medida de la longitud del péndulo.